G. DARBOUX

Sur les propriétés métriques des surfaces du second degré

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 144-153
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__144_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur les propriétés métriques des surfaces du second degré; par M. G. Darboux.

(Séance du 1er juillet 1874)

I. On sait qu'étant donnée une conique sphérique, il existe trois séries de petits cercles doublement tangents à la conique. Les cercles d'une même série ont leurs centres sur le même axe de la conique. Un calcul facile conduit aux propositions suivantes :

Théorème I. — *Pour tout point de la conique, il existe un rapport constant entre le sinus de l'arc tangent mené de ce point à un petit cercle fixe doublement tangent à la conique et le sinus de l'arc perpendiculaire abaissé de ce point sur l'arc de contact du petit cercle et de la conique.*

Théorème II. — *La somme ou la différence des arcs tangents qu'on peut mener d'un point d'une conique sphérique à deux petits cercles doublement tangents d'une même série est constante.*

Ces propositions transformées par la théorie des figures supplémentaires conduisent aux deux suivantes :

Théorème III. — *Étant donnés une conique sphérique et un cercle doublement tangent, il existe un rapport constant entre le sinus de l'angle sous lequel un arc de grand cercle tangent à la conique est coupé par le petit cercle, et le sinus de l'arc perpendiculaire, abaissé du pôle de l'arc de contact par rapport à la conique, sur l'arc tangent.*

Théorème IV. — *La somme ou la différence des angles sous lesquels un arc de grand cercle tangent à la conique sphérique coupe deux petits cercles doublement tangents d'une même série est constante.*

Ces propositions, qui comprennent comme cas particulier les propriétés des arcs cycliques, s'étendent sans difficulté aux coniques planes, et l'on obtient alors les théorèmes suivants :

Théorème V. — *Étant donnés une conique plane et un cercle doublement tangent, il existe un rapport constant entre la perpendiculaire abaissée du pôle* *de la corde de contact de ce cercle et de la conique sur une tangente quelconque et le sinus de l'angle sous lequel cette tangente coupe le cercle.*

THÉORÈME VI. — *La somme ou la différence des angles sous lesquels une tangente à la conique coupe deux cercles doublement tangents d'une même série a une valeur constante.*

Nous nous proposons de démontrer des propositions analogues relatives aux surfaces du second ordre.

II. Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

'équation d'une quadrique. Une sphère doublement tangente à la surface et ayant son centre dans le plan des zy aura pour équation

$$x^2+(y-y')^2+(z-z')^2=R^2, \tag{2}$$

où

$$R^2=a^2\left(1-\frac{y'^2}{b^2-a^2}-\frac{z'^2}{c^2-a^2}\right),$$

et l'équation de la surface pourra s'écrire

$$x^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\frac{b^2-a^2}{b^2}\left(y-\frac{b^2y'}{b'-a^2}\right)^2+\frac{c^2-a^2}{c^2}\left(z-\frac{c^2z'}{c^2-a^2}\right)^2+R^2.$$

Prenons sur la surface un point quelconque (x_1,y_1,z_1) et cherchons l'angle sous lequel le plan tangent en ce point coupe la sphère représentée par l'équation (2). Cet angle, que nous appellerons V, sera donné par la formule

$$\cos V=\frac{\frac{y'y_1}{b^2}+\frac{z'z_1}{c^2}-1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}}\sqrt{a^2\left(1-\frac{y'^2}{b^2-a^2}-\frac{z'^2}{c^2-a^2}\right)}},$$

qui exprime que cos V est le quotient de la distance du centre de la sphère au plan par le rayon de la sphère. Cela posé, exprimons x_1, y_1, z_1 en fonction des coordonnées y, z du point où la normale en (x_1,y_1,z_1) rencontre le plan des yz. On a

$$y_1=\frac{b^2y}{b^2-a^2},\quad z_1=\frac{c^2z}{c^2-a^2},\quad \frac{x_1^2}{a^2}=1-\frac{b^2y^2}{(b^2-a^2)^2}-\frac{c^2z^2}{(c^2-a^2)^2}.$$

En substituant ces valeurs dans cos V, on trouve

$$\cos V=\frac{\frac{yy'}{b^2-a^2}+\frac{zz'}{c^2-a^2}-1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2-a^2}-\frac{z^2}{c^2-a^2}}\sqrt{1-\frac{y'^2}{b^2-a^2}-\frac{z'^2}{c^2-a^2}}}. \tag{3}$$

La symétrie de cette formule conduit à la remarque suivante : Étant donnés deux points M,M′ de la quadrique, et les sphères tangentes en M,M′, ayant leurs centres dans le même plan principal, l'angle sous lequel le plan tangent en M coupe la sphère tangente en M′ est égal à celui sous lequel le plan tangent en M′ coupe la sphère tangente en M. Mais la forme de l'expression précédente nous conduit à un théorème plus important.

Faisons correspondre à un point quelconque M de l'ellipsoïde un plan variable,

$$mX + nY + pZ = 0,$$

de la manière suivante. Désignons, comme nous l'avons déjà fait, par y, z les coordonnées du point où la normale en M vient couper le plan principal, et posons

$$m = 1, \quad n = \frac{y}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad p = \frac{z}{\sqrt{a^2 - c^2}};$$

alors à un autre point M′, pour lequel y, z seront remplacés par y', z', correspondra un nouveau plan tel que l'on ait

$$m' = 1, \quad n' = \frac{y'}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad p' = \frac{z'}{\sqrt{a^2 - c^2}},$$

et la formule (3) deviendra

$$\cos V = \frac{mm' + nn' + pp'}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\,\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}}.$$

Donc V sera égal à l'angle des deux plans correspondants aux deux points M,M′. Nous avons donc le résultat suivant :

Soient M, A, B, C quatre points de la quadrique ; (M), (A), (B), (C) les quatre plans correspondants tels que nous venons de les définir ; S_M, S_A, S_B, S_C les quatre sphères tangentes en M, A, B, C à la quadrique et ayant leurs centres dans le plan des yz. Les angles du plan tangent en M à la quadrique avec les trois sphères S_A, S_B, S_C sont égaux aux angles que fait le plan variable (M) avec les trois plans (A), (B), (C). Donc :

Théorème VII. — *Étant données une quadrique et trois sphères doublement tangentes d'une même série, il y a entre les angles que fait un plan tangent variable avec ces trois sphères la même relation qu'entre les angles d'un plan variable avec les trois faces d'un trièdre fixe.*

Autrement : les angles que fait le plan tangent avec les trois sphères sont égaux aux angles que fait un plan variable avec les trois faces d'un trièdre fixe convenablement choisi.

III. La relation entre les angles que fait un plan variable (M) avec trois plans fixes (A), (B), (C) est bien connue. Elle se met sous la forme suivante :

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos AM & \cos BM & \cos CM \\ \cos MA & 1 & \cos BA & \cos CA \\ \cos MB & \cos AB & 1 & \cos CB \\ \cos MC & \cos AC & \cos BC & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut déduire de cette relation une équation entre les distances de trois points d'un plan principal d'une quadrique à un plan tangent quelconque. Soient (β_1,γ_1), (β_2,γ_2), (β_3,γ_3) les coordonnées des centres des sphères S_A, S_B, S_C. Appelons d_1, d_2, d_3 les distances de ces centres au plan tangent en M, et posons

$$\beta_{ij} = 1 - \frac{\beta_i\beta_j}{b^2-a^2} - \frac{\gamma_i\gamma_j}{c^2-a^2}.$$

Soient en outre R_1, R_2, R_3 les rayons des sphères S_A, S_B, S_C. D'après les formules déjà données, on aura

$$R_1^2 = a^2\beta_{11},\quad R_2^2 = a^2\beta_{22},\quad R_3^2 = a^2\beta_{33},$$
$$\cos AB = \frac{\beta_{12}}{\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}},\ \cos AC = \frac{\beta_{13}}{\sqrt{\beta_{11}\beta_{33}}},\ \cos BC = \frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{22}\beta_{33}}}.$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\cos AM = \frac{d_1}{R_1},\ \cos BM = \frac{d_2}{R_2},\ \cos CM = \frac{d_3}{R_3}.$$

L'équation (4) prendra donc la forme

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a^2 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ d_2 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ d_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la relation entre les distances de trois points fixes du plan des yz à un plan tangent variable.

Examinons quelques cas particuliers.

Supposons d'abord que les centres des trois sphères S_A, S_B, S_C forment un triangle conjugué par rapport à la focale F_x de la surface, qui se trouve dans le plan des yz. On aura

$$\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0,$$

et l'équation (5) deviendra

$$1 = \frac{d_1^2}{R_1^2} + \frac{d_2^2}{R_2^2} + \frac{d_3^2}{R_3^2},$$

c'est-à-dire, la somme des carrés des cosinus des angles que fait le plan tangent variable avec les trois sphères fixes ainsi choisies est constante.

Supposons maintenant que les trois points soient pris sur la focale F_x. On aura

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 0,$$

et, en faisant

$$\beta_{23} = B, \quad \beta_{13} = B', \quad \beta_{12} = B'',$$

l'équation (5) devient alors

$$(6) \quad BB'B''a^2 = -B^2d^2 - B'^2d'^2 - B''^2d''^2 + 2B'B''d'd'' + 2BB''dd'' + 2BB'dd';$$

c'est la relation qui existe entre les distances de trois foyers fixes à un plan tangent. Soit

$$\alpha = \sqrt{Bd}, \quad \alpha' = \sqrt{B'd'}, \quad \alpha'' = \sqrt{B''d''},$$

l'équation (6) exprime que la surface du triangle ayant pour côtés α, α', α'' est constante. D'où cette proposition :

Théorème VIII. — *Si, de trois foyers pris sur une même focale, on abaisse des perpendiculaires sur un plan tangent quelconque, la surface du triangle construit avec les moyennes proportionnelles à ces trois distances et à trois nombres fixes est constante.*

Cette propriété des foyers est caractéristique. Elle peut être considérée comme la généralisation de l'équation

$$dd' = b^2,$$

qui exprime que le produit des distances des deux foyers d'une conique à une tangente est constant.

Pour que les éléments de l'énoncé soient réels, il faut que les foyers soient pris sur la focale elliptique.

Quant au théorème VII, il est clair qu'il est la généralisation du théorème VI relatif aux coniques, qu'on peut énoncer ainsi :

Il y a la même relation entre les angles que fait une tangente variable à la conique avec deux cercles doublement tangents d'une même série, qu'entre les angles d'une droite variable avec deux droites fixes.

IV. Le théorème VII constitue un nouveau mode de génération des surfaces du second degré. On peut en indiquer plusieurs autres. Citons les propositions suivantes :

Théorème IX. — *Etant donnés deux cercles fixes* (C), (C′) *sur une sphère, si un petit cercle variable se meut sur cette sphère de telle manière que le sinus de l'angle qu'il fait avec le cercle* (C) *soit proportionnel au cosinus de l'angle qu'il fait avec le cercle* (C′), *son plan enveloppe une quadrique.*

Réciproquement : *Étant donnés une surface quelconque du second ordre et une sphère doublement tangente, soit* (C) *un cercle d'intersection de la sphère et de la quadrique, soit* (C′) *le cercle de la sphère qui se trouve dans le plan polaire par rapport à la sphère du pôle du plan du cercle* (C) *par rapport à la quadrique ; le plan tangent à la quadrique coupe la sphère suivant un cercle tel que le sinus de l'angle qu'il fait avec le cercle* (C) *soit proportionnel au cosinus de l'angle qu'il fait avec le cercle* (C′). .

Voilà un premier exemple d'une relation à deux éléments seulement, propre à définir toute quadrique. En voici un autre plus élégant :

THÉORÈME X. — *L'enveloppe du plan d'un cercle* (U), *coupant deux cercles fixes* (C), (C′) *d'une même sphère sous des angles dont la somme soit constante, est une quadrique doublement tangente à la sphère.*

Soit en effet

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

l'équation de la sphère, et soient (α,β,γ), (α',β',γ') les pôles des deux cercles (C), (C′). Soient x, y, z les coordonnées du pôle du cercle variable (U). L'angle θ des deux cercles (U), (C) sera donné par la formule

$$\cos\theta=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z-R^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2}\ \sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}=\frac{P}{\sqrt{S}},$$

où l'on a posé

$$P=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z-R^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2}},\quad S=x^2+y^2+z^2-R^2.$$

De même, en posant

$$Q=\frac{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z-R^2}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2-R^2}},$$

on aura, pour l'angle θ' de (U) et de (C′), la formule

$$\cos\theta'=\frac{Q}{\sqrt{S}}.$$

L'équation

$$\theta+\theta'=c^{te}=\psi,$$

qui prend la forme

$$\cos^2\theta+\cos^2\theta'-2\cos\theta\cos\theta'\cos\psi=\sin^2\psi,$$

nous donnera donc

$$P^2+Q^2-2PQ\cos\psi=S\sin^2\psi.$$

Cette équation, qui contient x, y, z, représente par conséquent le lieu du pôle du cercle variable (U). Comme elle est du second degré, on voit que le plan du cercle variable enveloppera une quadrique, ce qui démontre notre proposition. On établira sans difficulté la réciproque suivante :

Théorème XI. — *Étant données une quadrique quelconque et une sphère doublement tangente coupant la quadrique suivant deux cercles* (C), (C′), *un plan variable tangent à la quadrique coupera la sphère suivant un cercle qui fera avec les cercles fixes* (C), (C′) *des angles dont la somme sera constante.*

Malheureusement les éléments qui figurent dans cette proposition ne sont tous réels que si la quadrique est réglée et si l'on prend une quelconque des sphères la coupant suivant deux cercles réels.

V. On peut généraliser la proposition précédente en considérant au lieu d'une sphère doublement tangente à la quadrique une sphère quelconque.

Soit

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta=Ax^2+By^2+Cz^2$$

l'équation d'une quadrique (Q) passant par l'intersection d'une sphère (S)

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta=0,$$

et du cône

$$Ax^2+By^2+Cz^2=0.$$

Soit $M(x,y,z)$ un point de la surface, $A(x',y',z')$ un point quelconque. L'angle V suivant lequel se coupent les cercles situés dans les plans polaires de A et de M par rapport à la sphère est donné par la formule

$$\cos V=\frac{x(x'-\alpha)+y(y'-\beta)+z(z'-\gamma)+\delta-\alpha x'-\beta y'-\gamma z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2-2\alpha x'-2\beta y'-2\gamma z'+\delta}}.$$

Assujettissons le point A (x',y',z') aux conditions suivantes :

$$\delta-\alpha x'-\beta y'-\gamma z'=0,$$

$$\frac{(x'-\alpha)^2}{A}+\frac{(y'-\beta)^2}{B}+\frac{(z'-\gamma)^2}{C}=S'=x'^2+y'^2+z'^2-2\alpha x'-2\beta y'-2\gamma z'+\delta.$$

Alors le point A pourra occuper toutes les positions sur une conique fixe représentée par les deux équations précédentes, et qu'on reconnaîtra facilement être la ligne double de la développable circonscrite à (S) et à (Q) située dans le plan polaire de l'origine qui est le même par rapport à ces deux surfaces. En tenant compte des relations précédentes, on pourra poser

$$\frac{x'-\alpha}{\sqrt{A}}=m'\sqrt{S'},\quad \frac{y'-\beta}{\sqrt{B}}=n'\sqrt{S'},\quad \frac{z'-\gamma}{\sqrt{C}}=p'\sqrt{S'},$$

et cos V prendra la forme

$$\cos V = \frac{m' x\sqrt{A} + n' y\sqrt{B} + p' z\sqrt{C}}{\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}\,\sqrt{Ax^2 + By^2 + Cz^2}}.$$

Si, au point (x, y, z) M de la surface, on fait correspondre le plan

$$uX + vY + wZ = 0,$$

par les relations

$$u = x\sqrt{A}, \quad v = y\sqrt{B}, \quad w = z\sqrt{C},$$

la formule précédente prendra la forme

$$\cos V = \frac{m'u + n'v + p'w}{\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}\,\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}};$$

V sera donc l'angle des deux plans

$$m'X + n'Y + p'Z = 0,$$
$$uX + vY + wZ = 0,$$

définis par ce qui précède. On a donc la proposition suivante :

Étant données une quadrique (Q) et une sphère (S), si l'on prend trois points quelconques A, B, C sur une des lignes doubles de la développable circonscrite à (S) et à (Q), et que l'on considère les cercles (A), (B), (C), (M) situés dans les plans polaires des points A, B, C, M par rapport à la sphère, quand le point M décrira la quadrique (Q) le cercle correspondant (M) fera avec les trois cercles fixes (A), (B), (C) les mêmes angles qu'un plan variable avec les trois faces d'un trièdre.

En transformant par la méthode des polaires réciproques, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème XII. — *Étant données une quadrique et une sphère, un plan tangent à la quadrique coupe la sphère suivant un cercle variable* (U). *Adjoignons à ce cercle variable trois cercles fixes, intersections de la sphère et de trois plans tangents quelconques à l'un des cônes qui passent par l'intersection de la sphère et de la quadrique. Le cercle variable* (U) *fera avec ces trois cercles fixes les mêmes angles qu'un plan variable avec les trois faces d'un trièdre.*

VI. Nous terminerons en indiquant une dernière propriété générale des quadriques.

Proposons-nous de trouver le lieu des centres des sphères coupant trois sphères données sous des angles dont les différences soient connues. Soient

$$S = d^2 - R^2 = 0, \quad S' = d'^2 - R'^2 = 0, \quad S'' = d''^2 - R''^2 = 0$$

les équations des trois sphères, d, d', d'' désignant les distances à leurs centres, R, R', R'', leurs rayons. Soit ρ le rayon de l'une des sphères cherchées; elle coupera d'après les conditions du problème les trois sphères (S), (S'), (S'') sous des angles qu'on pourra représenter par $\alpha + \omega$, $\alpha' + \omega$, $\alpha'' + \omega$, $\alpha, \alpha', \alpha''$ étant des nombres fixes, ω une inconnue. Appelons d, d', d'' les distances du centre de cette sphère à ceux des trois sphères (S), (S'), (S''). On devra avoir les équations

$$\frac{d^2 - R^2 - \rho^2}{2R\rho} = \cos(\alpha + \omega). \quad \frac{d'^2 - R'^2 - \rho^2}{2R'\rho} = \cos(\alpha' + \omega),$$
$$\frac{d''^2 - R''^2 - \rho^2}{2R''\rho} = \cos(\alpha'' + \omega),$$

entre lesquelles il faudra éliminer ρ et ω. Posons

$$-\rho\cos\omega = u, \quad \rho\sin\omega = v,$$

elles prendront la forme

$$d^2 = (u - R\cos\alpha)^2 + (v - R\sin\alpha)^2,$$
$$d'^2 = (u - R'\cos\alpha')^2 + (v - R'\sin\alpha')^2,$$
$$d''^2 = (u - R''\cos\alpha'')^2 + (v - R''\sin\alpha'')^2,$$

équations entre lesquelles il faudrait éliminer u, v. Or cette élimination est inutile, car ces équations expriment que les distances d'un point variable du lieu aux centres des sphères (S), (S'), (S'') sont respectivement égales aux distances d'un point variable d'un certain plan (u, v) à trois points fixes $(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$, $(R'\cos\alpha', R'\sin\alpha')$, $(R''\cos\alpha'', R''\sin\alpha'')$ de ce plan. Donc, d'après le théorème de Jacobi, le lieu décrit par le centre sera une quadrique ayant pour foyers situés sur la même focale les centres des sphères (S), (S'), (S'').

On démontrera sans peine la réciproque suivante, remarquable par sa généralité :

Théorème XIII. — *Étant données une quadrique quelconque et une sphère (S) doublement tangente à cette surface, construisons toutes les sphères (S'), (S''),... ayant pour centres les foyers situés dans le même plan principal que le centre de la sphère (S) et passant par les deux points de contact de cette sphère et de la quadrique. Une sphère variable ayant son centre sur la surface et coupant à angle droit la sphère (S) coupera les sphères (S'), (S''), ... sous des angles dont les différences seront constantes.*

Corollaire. — La quadrique peut être considérée comme le lieu des centres des sphères coupant sous des angles dont les différences soient constantes, trois sphères ayant pour centres trois foyers quelconques pris sur la même focale et se coupant en un point de la surface.

On peut aussi la définir comme le lieu des centres des sphères coupant à angle droit une sphère fixe et coupant deux des sphères précédentes sous des angles dont la différence soit constante.

Je terminerai en énonçant la proposition suivante, qui se rattache à ce sujet d'études :

Théorème XIV. — *Étant donnée une quadrique, il existe trois couples de deux sphères fixes telles que les plans tangents en tous les points d'une ligne de courbure fassent avec deux sphères de l'un des couples des angles dont la somme soit constante.*

Ces sphères sont celles qui coupent la surface suivant quatre droites et qui ont déjà été considérées dans d'autres relations métriques. Ainsi, dans le cas de l'ellipsoïde, deux couples de sphères sont réels.

Il y a d'abord les deux sphères ayant leurs centres sur le grand axe et intérieures à l'ellipsoïde. La somme ou la différence des tangentes menées d'un point d'une ligne de courbure à ces deux sphères est constante.

Il y a ensuite les deux sphères conjuguées ayant leurs centres sur le petit axe ; les deux sphères étant extérieures à l'ellipsoïde seront coupées par les plans tangents en tous les points d'une ligne de courbure sous des angles dont la somme ou la différence sera constante.