BULLETIN DE LA S. M. F.

FOURET

Sur les courbes planes transcendantes, susceptibles de faire partie d'un système (μ, s)

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 96-100
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__96_1>

Sur les courbes planes transcendantes, susceptibles de faire partie d'un système (μ,ν) ; par M. Fouret.

(Séance du 6 mai 1874)

I. Dans un précédent travail (*), nous avons établi l'existence des systèmes de courbes transcendantes, définis par deux caractéristiques μ,ν, qui sont respectivement les nombres des courbes du système qui passent par un point et qui touchent une droite, le point et la droite pouvant d'ailleurs être choisis arbitrairement. Le problème que nous avons pour but de résoudre dans cette note est le suivant :

A quelles conditions une courbe transcendante doit-elle satisfaire pour pouvoir faire partie d'un système? Ces conditions étant remplies, quelles sont les caractéristiques du ou des systèmes auxquels cette courbe peut appartenir?

Supposons un instant qu'une courbe transcendante (C), prise au hasard, puisse faire partie d'un système (μ,ν). On sait que le lieu des points de contact des tangentes aux courbes d'un tel système, issues d'un point o quelconque du plan, est une courbe (A) d'ordre $\mu+\nu$, ayant un point multiple d'ordre μ en o (*Loc. cit.*, art. V). Cette courbe (A) passera en particulier

(*) *Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques* (Même recueil). Voir, sur le même sujet, une note insérée aux *Comptes rendus* (séance du 23 mars 1874).

par les points de contact des tangentes à (C) issues du point o. De là cette conséquence :

Pour qu'une courbe transcendante donnée puisse faire partie d'un système (μ,ν), *il faut que les points de contact des tangentes, menées d'un point* o *quelconque à cette courbe, soient situés sur une courbe algébrique d'ordre* $\mu+\nu$, *ayant un point multiple d'ordre* μ *en* o.

II. Je dis, de plus, que cette condition est suffisante. En effet, si elle est remplie d'une manière générale, elle le sera en particulier lorsque nous prendrons le point o à l'infini dans la direction

$$y=\alpha x. \tag{1}$$

Soit

$$\varphi(x,y,\alpha)=0 \tag{2}$$

l'équation de la courbe (A) de degré $\mu+\nu$, qui contient les points de contact des tangentes à (C) parallèles à la direction (1). En faisant varier α dans (2), on obtiendrait successivement toutes les courbes (A) correspondant aux diverses directions de tangentes. Par suite, l'équation (2) est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de (C) et le coefficient angulaire de la tangente en ce point, ce qui revient à dire que

$$\varphi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{3}$$

est une équation différentielle à laquelle satisfait (C). Mais cette équation différentielle définit, outre la courbe (C), une infinité de courbes formant un système (μ,ν) [*Loc. cit.*, art. II]. Il existe donc bien un système (μ,ν) dont la courbe (C) fait partie.

On voit facilement qu'il ne saurait y avoir plusieurs systèmes dans ce cas; car, s'il en existait un second défini par l'équation

$$\psi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{4}$$

les coordonnées de (C), vérifiant à la fois les équations (3) et (4), devraient par suite satisfaire à l'équation résultant de l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ entre (1) et (2). Or, cette dernière équation nécessairement algébrique ne saurait définir une courbe transcendante; donc, etc. Ainsi :

Lorsqu'une courbe transcendante satisfait à la condition ci-dessus indiquée (art. I), *elle fait partie d'un système* (μ,ν), *et ce système est le seul auquel cette courbe puisse appartenir.*

La démonstration qui précède établit même, en s'aidant de l'homographie, qu'une courbe transcendante fait partie d'un système, quand les points de contact des tangentes, issues d'un point quelconque d'une même droite choisie arbitrairement, sont sur une courbe algébrique.

III. Soit

$$f(x,y)=0$$

l'équation d'une courbe transcendante (C); on a

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}=0.$$

Le lieu des points de contact des tangentes menées à (C) parallèlement à la direction

$$y=\alpha x$$

est par suite

$$\frac{df}{dx}+\alpha\frac{df}{dy}=0.$$

L'équation générale des courbes passant par les points de contact de ces tangentes est évidemment

$$\mathrm{U}f(x,y)+\mathrm{V}\left(\frac{df}{dx}+\alpha\frac{df}{dy}\right)=0,$$

U et V désignant deux fonctions de x, de y et de α, assujetties à la seule condition d'être continues et bien déterminées.

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, la condition nécessaire et suffisante pour que (C) fasse partie d'un système, est que l'on puisse choisir U et V de manière à rendre algébrique, entier et rationnel, le premier membre de la dernière équation. Telle est la condition analytique à laquelle doit satisfaire l'équation d'une courbe transcendante, pour que cette courbe puisse faire partie d'un système.

Il nous paraît difficile de pousser plus loin la recherche générale des caractères que doit présenter une équation transcendante à deux variables, pour définir une courbe susceptible d'appartenir à un système. Nous donnerons seulement quelques exemples de courbes transcendantes remplissant cette condition.

IV. 1° La logarithmique

$$y=lx$$

fait partie d'un système dans les caractéristiques sont $\mu=1$, $\nu=1$. Cela résulte immédiatement de ce que l'on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Le système auquel appartient la logarithmique donnée est formé de logarithmiques résultant toutes de la translation de cette dernière parallèlement à l'axe des y. Leur équation générale est

$$y = lx + c,$$

dans laquelle c désigne une constante arbitraire.

2° La sinussoïde

$$y = \sin x$$

fait partie d'un système dont les caractéristiques sont $\mu = 2$, $\nu = 2$. En effet, on a

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

et par suite

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1.$$

Cette dernière équation, mise sous la forme

$$\left(\frac{dy}{dx} + \cos x\right)\left(\frac{dy}{dx} - \cos x\right) + (y + \sin x)(y - \sin x) = 0,$$

montre que les fonctions désignées ci-dessus par U et V sont, dans ce cas, respectivement égales à $y + \sin x$, $\frac{dy}{dx} + \cos x$.

Le système auquel appartient la sinussoïde donnée est formé des diverses sinussoïdes résultant du glissement de cette dernière le long de l'axe des x.

Nous avons déjà vu (*Loc. cit.*, art. XXII) que la chaînette, la cycloïde, la spirale d'Archimède, la spirale logarithmique, font partie de systèmes dont nous avons donné les caractéristiques. Nous ajouterons qu'il en est de même des épicycloïdes et de la développante de cercle.

Les épicycloïdes ou les développantes de cercle égales et de même pôle forment un système dont les caractéristiques sont $\mu = 2$, $\nu = 2$.

V. Nous donnerons, en terminant, un type assez général d'équations de courbes transcendantes susceptibles de faire partie d'un système. C'est le suivant

$$\mathrm{F}\left[x, y, \sin\frac{m}{n}u, \sin\frac{m'}{n'}u, \ldots, \cos\frac{p}{q}u, \cos\frac{p'}{q'}u, \ldots, e^{\frac{r}{s}u}, e^{\frac{r'}{s'}u}, \ldots\right] = 0,$$

F désignant une fonction algébrique, entière et rationnelle, des quantités contenues dans la parenthèse, u étant une fonction algébrique rationnelle de x et de y, $m,n,m',n',\ldots,p,q,p',q',\ldots,r,s,r',s',\ldots$ des nombres entiers quelconques.

En effet, en se servant de formules connues, on pourra exprimer toutes les fonctions trigonométriques et exponentielles contenues dans F au moyen de $\sin\frac{u}{\delta}$, $\cos\frac{u}{\delta}$, δ désignant le plus petit commun dénominateur des fractions $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots, \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \ldots, \frac{r}{s}, \frac{r'}{s'}, \ldots$. L'équation donnée étant ramenée à la forme

$$f\left(x, y, \sin\frac{u}{\delta}, \cos\frac{u}{\delta}\right) = 0,$$

en la différentiant par rapport à x, on obtiendra une équation telle que

$$\varphi\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \sin\frac{u}{\delta}, \cos\frac{u}{\delta}\right] = 0,$$

et, en éliminant $\sin\frac{u}{\delta}$ et $\cos\frac{u}{\delta}$ entre les deux dernières équations et la relation

$$\sin^2\frac{u}{\delta} + \cos^2\frac{u}{\delta} = 1,$$

on arrivera finalement à une équation différentielle algébrique, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe définie par l'équation donnée puisse faire partie d'un système.