BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur les courbes du troisième ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 110-114

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__110_1>

Sur les courbes du troisième ordre; par M. LAGUERRE.

(Séance du 3 février 1875.)

1. Soit une cubique fondamentale $U = 0$; en adoptant les notations de M. Salmon (*Higher plane curves*, p. 183 et suiv.), je désignerai par S et T les deux invariants de U, par H son hessien et par F, P et Q ses contrevariants principaux. La hessienne de la courbe aura donc pour équation $H = 0$; l'équation tangentielle de la courbe elle même sera $F = 0$; et l'équation tangentielle de la cayleyenne $P = 0$.

La cubique fondamentale et sa hessienne déterminent un faisceau (U); une courbe quelconque de ce faisceau a pour équation $U + 6\rho H = 0$; je la désignerai par la notation U_ρ.

Je considérerai en même temps le faisceau tangentiel des courbes déterminées par l'équation $F - 6\rho P^2 = 0$, et je désignerai par la notation F_ρ la courbe de ce faisceau qui correspond à une valeur déterminée de ρ.

2. Un système de trois points étant déterminé sur une droite par les racines d'une équation obtenue en égalant à zéro un polynôme du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d,$$

j'appellerai *points covariants du système* les points déterminés sur la droite par les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le polynôme du second degré

$$(ac - b^2)\, x^2 + (ad - bc)\, x + (bd - c^2)$$

covariant du précédent.

3. Cela posé, on a les propositions suivantes :

I. *Une droite quelconque* D *du plan de* U *rencontrant cette courbe en un système de trois points, les deux points covariants de ce système sont situés sur une même cubique du faisceau* (U).

Cette cubique rencontre D en un troisième point que j'appellerai le *centre de la droite.*

II. *Par tout point* M *du plan passent quatre droites ayant le point* M *pour centre ; je les appellerai les rayons du point* M.

III. *Si, d'un point quelconque* M *de la cubique* U_ρ, *on mène des tangentes à la conique polaire de* M *par rapport à* U, *ces tangentes enveloppent la courbe de sixième classe* F_ρ.

IV. *Des six tangentes que l'on peut mener d'un point* M *de* U *à la courbe* F_ρ, *deux sont les tangentes menées du point* M *à sa conique polaire relativement à* U, *les quatre autres sont les rayons du point* M.

V. *Si une droite se meut tangentiellement à* F_ρ, *son centre décrit la cubique* U_ρ.

VI. *Si une droite touche* F_ρ *au point* A *et rencontre* U_ρ *aux points* a, b, c, *les quatre points* A, a, b, c *forment un système harmonique.*

4. Voici quelques conséquences de cette dernière proposition :

Étant donnée une cubique U, si l'on cherche les courbes jouissant de la propriété qu'une quelconque de leurs tangentes est partagée harmoniquement par leur point de contact et les trois points où elle rencontre la cubique U, on trouve que ces courbes sont algébriques, et il est facile d'en obtenir une construction géométrique ([1]).

A toute cubique U se rattache en effet une intégrale elliptique $\int d\mathrm{V}$ qui jouit de la propriété suivante : Désignons, en général, par (M) la valeur de cette intégrale prise depuis un point convenablement choisi jusqu'à un point M pris arbitrairement sur cette courbe ; la condition nécessaire et suffisante pour que trois points A, B, C de la courbe soient en ligne droite peut s'exprimer par la relation

$$(\mathrm{A}) + (\mathrm{B}) + (\mathrm{C}) \equiv 0,$$

le signe de la congruence indiquant que la somme, qui se trouve dans le premier membre, est de la forme $mp + nq$, m et n désignant des nombres entiers, p et q les deux périodes de l'intégrale.

Si une droite tourne autour d'un point A de la courbe, en désignant par B et C les deux points variables où cette droite mobile coupe la courbe, on aura, en vertu de ce qui précède,

$$(\mathrm{A}) = 0,$$

et, par suite,

$$(\mathrm{B}) + (\mathrm{C}) \equiv 0,$$

ce qui donne géométriquement l'intégrale de l'équation

$$d\mathrm{V} + d\mathrm{V}' = 0.$$

Si maintenant on désigne par A′ le point conjugué harmonique de A relativement à B et C, on voit que la droite, en tournant infiniment peu autour du point A′, décrit sur la courbe deux segments infiniment petits égaux à ceux qu'elle décrivait en tournant autour du point A, l'un de ces segments étant décrit dans un sens contraire.

([1]) *Voir*, sur ce sujet, ma Note *Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre*, 22 (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XV).

On a donc, dans ce cas,

$$dV - dV' = 0,$$

équation dont l'intégrale est $(B) - (C) \equiv 0$.

D'où cette conclusion :

Si une courbe est telle, qu'une quelconque de ses tangentes rencontrant la cubique U *en trois points* A, B, C, *son point de contact soit le conjugué harmonique du point* A *relativement à* B *et à* C, *les points variables* B *et* C *sont reliés par la relation*

$$(B) - (C) \equiv 0.$$

De là encore une construction géométrique simple de ces courbes.

Soient, en effet, b et c deux points fixes pris sur la courbe et M un point mobile décrivant cette courbe. Menons les droites Mb et Mc et appelons B et C les points où elles coupent respectivement U; je dis que la droite BC enveloppe une courbe jouissant de la propriété énoncée. Les trois points M, b, B étant en effet en ligne droite, ainsi que les points M, c, C, on a

$$(M) + (b) + (B) \equiv 0,$$
$$(M) + (c) + (C) \equiv 0;$$

d'où

$$(B) - (C) \equiv (c) - (b) \equiv \text{const.}$$

Il est clair, d'ailleurs, que, pour obtenir toutes les courbes cherchées, il suffit, un des points b étant choisi arbitrairement et restant fixe, de faire varier le point C.

5. Quelque simple que soit la construction géométrique que je viens de donner, elle se prêterait peut-être difficilement à la recherche de l'équation générale des courbes elles-mêmes.

Le théorème VI donné ci-dessus (3) permet d'y arriver facilement.

On voit, en effet, qu'étant donnée une cubique U_ρ, la courbe de sixième classe F_ρ est une solution de la question; or, U_ρ étant une courbe déterminée, comme on peut prendre pour cubique fondamentale une quelconque des cubiques du faisceau (U), on voit qu'il lui correspond une infinité de courbes F_ρ dont l'ensemble donne la solution complète du problème.

Pour achever la solution, changeons U en $U + 6\lambda H$, λ étant un nombre indéterminé; H, P et F deviennent alors respectivement (Salmon, *loc. cit.*, p. 189 et suiv.)

$$(-2S\lambda - T\lambda^2 + 8S^2\lambda^3)\,U + (1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3)\,H,$$
$$P + Q\lambda - 12SP\lambda^2 + 4(SQ - TP)\lambda^3$$

et

$$(1 + 24S\lambda^2 + 8T\lambda^3 - 48S^2\lambda^4)\,F$$
$$- 24(\lambda + 2T\lambda^4)\,P^2 - 24(\lambda^2 - 4S\lambda^4)\,PQ - 8\lambda^3Q^2;$$

par suite, U_ρ devient

$$U[1 - 2S\lambda - T\lambda^2 + 8S^2\lambda^3] + 6H[\lambda + \rho(1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3)],$$

ou simplement U, si l'on détermine ρ par la condition

$$\rho = \frac{-\lambda}{1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3}.$$

En effectuant la même transformation dans F_ρ, cette expression devient, réductions faites,

$$(1 + 24S\lambda^2 + 8T\lambda^3 - 48S^2\lambda^4)$$
$$\times [(1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3)\,F - 18\lambda P^2 - 12\lambda^2 PQ - 2\lambda^3 Q^2];$$

l'équation générale des courbes considérées est donc

$$(1 + 12S\lambda^2 + 2T\lambda^3)\,F - 18\lambda P^2 - 12\lambda^2 PQ - 2\lambda^3 Q^2 = 0.$$
