

# BULLETIN DE LA S. M. F.

C DE POLIGNAC

## Note sur les substitutions linéaires

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 4 (1875-1876), p. 120-127

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1875-1876\\_\\_4\\_\\_120\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__120_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1875-1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Note sur les substitutions linéaires*; par M. C. DE POLIGNAC.

(Séance du 5 avril 1876.)

Si l'on répète indéfiniment la substitution linéaire

$$x_1 = \frac{bx + d}{ax + c}, \quad x_2 = \frac{bx_1 + d}{ax_1 + c}, \quad \dots,$$

on aura toujours un résultat de la forme

$$\frac{Qx + S}{Px + R}.$$

L'expression générale de P, Q, R, S, en fonction de  $a, b, c, d$ , peut se mettre sous une forme assez simple.

Tout d'abord la nature même de l'opération par laquelle on passe d'une substitution PQRS à la suivante P'Q'R'S' donne

$$\begin{aligned} P' &= bP + aR, & R' &= dP + cR, \\ Q' &= bQ + aS, & S' &= dQ + cS, \end{aligned}$$

mais ces formules peuvent se transformer. Je dis qu'on aura, quel que soit le rang de la substitution considérée,

$$\frac{P}{a} = \frac{Q - R}{b - c} = \frac{S}{d}.$$

Admettons le fait jusqu'à P, Q, R, S; les formules précédentes donnent les relations

$$\frac{P'}{a} = b \frac{P}{a} + R, \quad \frac{Q' - R'}{b - c} = \frac{bQ - cR}{b - c}, \quad \frac{S'}{d} = Q + c \frac{S}{d}.$$

Égalant d'abord la première et la troisième, on obtient

$$b \frac{P}{a} + R = Q + c \frac{S}{d} = Q + c \frac{P}{a}$$

par hypothèse, ou

$$(b - c) \frac{P}{a} = Q - R, \quad \frac{P}{a} = \frac{Q - R}{b - c};$$

donc

$$\frac{P'}{a} = \frac{S'}{d}.$$

Quant à la deuxième relation, elle se transforme ainsi

$$\frac{Q' - R'}{b - c} = \frac{(b - c)Q + c(Q - R)}{b - c} = Q + c \frac{S}{d}$$

par hypothèse, ou

$$\frac{Q' - R'}{b - c} = \frac{S'}{d};$$

la généralité est donc établie.

Au moyen de cette remarque, on exprimera  $P'$  et  $Q'$  en fonction de  $P$  et  $Q$

$$(1) \quad P' = aQ + cP, \quad Q' = bQ + dP;$$

$R'$  et  $S'$  s'obtiendront ensuite en fonction de  $P'$  et  $Q'$ .

En général, on aura

$$P_{m+n} = P_m Q_n + R_m P_n, \quad Q_{m+n} = Q_m Q_n + S_m P_n,$$

formules dans lesquelles les indices sont permutables. Pour  $m = n$ , la première donne

$$P_{2n} = P_n (Q_n + R_n);$$

on trouvera encore

$$(Q'R' - P'S') = (bc - ad)(QR - PS),$$

d'où l'on conclura

$$(2) \quad Q_n R_n - P_n S_n = (bc - ad)^n,$$

et les propositions suivantes s'établiront de proche en proche.

$P_n, Q_n, R_n, S_n$  sont homogènes et de degré  $n$  en  $a, b, c, d$ ;

$P_n$  contient  $a$  en facteur commun et est symétrique par rapport à  $b$  et  $c$ ;

Les lettres  $a$  et  $d$  n'entrent point seules dans  $\frac{P_n}{a}$  et  $Q_n$ , mais toujours leur produit;

$Q_n$  et  $R_n$  ne diffèrent que par le changement de  $b$  en  $c$  et *vice versa*.

Enfin de l'équation (2) on tire, pour  $c = b$ ,  $d = a$ ,

$$Q - P_n^2 = (b^2 - a^2)^n;$$

d'où l'on conclura, dans cette hypothèse,

$$Q_n + P_n = (b + a)^n, \quad Q_n - P_n = (b - a)^n.$$

D'ailleurs les formules générales donneront aisément, pour  $d = 0$ ,  $c = b$ ,

$$P_n = nab^{n-1}, \quad Q_n = b^n.$$

L'ensemble de ces remarques nous conduit toujours, dans le cas de  $c = b$ , aux formules suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_n = a \left[ nb^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^{n-3} ad \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} b^{n-5} a^2 d^2 + \dots \right], \end{array} \right.$$

$$(4) \quad Q^n = b^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b^{n-2} ad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^{n-4} a^2 d^2 + \dots$$

Pour avoir l'expression générale de  $P_n$  et de  $Q_n$ , il suffira de décomposer les coefficients des puissances de  $ad$  en fonctions de  $b$  et de  $c$ , d'après la loi de formation. Ces fonctions seront symétriques dans  $P_n$ .

Désignons par la notation

$$(b^m c^{m'}) (ad)^k P_n$$

le coefficient de  $b^m c^{m'} (ad)^k$  dans le développement général de  $P_n$ , on aura, eu égard aux formules (1),

$$(5) \quad (b^m c^{m'}) (ad)^k P_n = (b^m c^{m'-1}) (ad)^k P_{n-1} + (b^m c^{m'}) (ad)^k Q_{n-1},$$

$$(6) \quad (b^m c^{m'}) (ad)^k Q_{n-1} = (b^{m-1} c^{m'}) (ad)^k Q_{n-2} + (b^m c^{m'}) (ad)^{k-1} P_{n-2}.$$

Ces formules permettront de conclure de proche en proche les va-



$m$  est constant,

$$(b^m c^{m'}) (ad)^k P_n = \sum_0^m f_{k-1}(m) \times \sum_0^{m'} f_{k-1}(m') = f_k(m) \times f_k(m').$$

On retrouve donc, pour le coefficient du terme général en  $(ad)^k$ , une expression de la même forme que pour  $(ad)^{k-1}$ , ce qui permettra de répéter le calcul indéfiniment.

La valeur même de  $f$  s'obtiendra en faisant successivement  $k=0$  et  $k=1$ . Le premier cas se traitera directement et de proche en proche au moyen des formules

$$P' = aQ + cP, \quad Q' = bQ + dP,$$

et l'on verra aisément que les termes indépendants de  $ad$  sont :

Dans  $P_n$ , les termes du développement  $\frac{b^n - c^n}{b - c}$ ;

Dans  $Q_n$ ,  $b^n$  simplement.

En faisant ensuite  $k=1$  dans la formule (6), on aura

$$(b^m c^{m'}) ad \cdot Q_{n-1} = (b^{m-1} c^{m'}) ad Q_{n-2} + 1.$$

Faisant varier  $m$  jusqu'à zéro dans le premier membre, et ajoutant comme ci-dessus, on obtiendra

$$(b^m c^{m'}) ad Q_{n-1} = m + 1,$$

et, en remplaçant dans la formule (5), on aura de même

$$(b^m c^{m'}) ad P_n = (m + 1)(m' + 1).$$

On a donc

$$f_1(m) = m + 1;$$

on en conclut, eu égard aux remarques qui précèdent,

$$f_2(m) = \sum_0^m f_1(m) = \sum_0^m (m + 1) = \frac{(m + 1)(m + 2)}{1 \cdot 2},$$

$$f_3(m) = \sum_0^m f_2(m) = \frac{(m + 1)(m + 2)(m + 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

d'après les propriétés connues des nombres figurés, et ainsi de suite.

La comparaison des formules (7), (8) avec (3), (4) conduit aux égalités suivantes :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=0}^{m'=0} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+k)}{1 \cdot 2 \dots k} \frac{(m'+1)(m'+2)\dots(m'+k)}{1 \cdot 2 \dots k} \\ & = \frac{n(n-1)\dots(n-2k)}{1 \cdot 2 \dots (2k+1)}, \end{aligned} \right.$$

avec  $m + m' + 2k + 1 = n$ ,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=0}^{m'=0} \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+k)}{1 \cdot 2 \dots k} \frac{(m'+1)(m'+2)\dots(m'+k-1)}{1 \cdot 2 \dots (k-1)} \\ & = \frac{n(n-1)\dots(n-2k+1)}{1 \cdot 2 \dots 2k}, \end{aligned} \right.$$

avec  $m + m' + 2k = n$ .

On peut déduire des formules (7) et (8) une règle extrêmement simple.

La formule (7) donne chaque coefficient de  $b^m c^{m'} (ad)^k$  sous forme d'un produit de deux nombres appartenant chacun à la  $(k+1)^{\text{ième}}$  ligne horizontale du triangle arithmétique de Pascal, et dont la somme des rangs est constante. Pour faire ce produit, on peut prendre les nombres  $m$  sur la  $(k+1)^{\text{ième}}$  colonne du triangle, et le nombre  $m'$  sur la  $(k+1)^{\text{ième}}$  ligne, d'où la règle suivante :

*Pour  $P_n$ .* Écrire horizontalement et verticalement la  $(k+1)^{\text{ième}}$  ligne du triangle de Pascal, puis former avec ces nombres une table de multiplication de Pythagore. Les hypoténuses qui joignent les nombres de même rang sur les deux côtés donneront les coefficients, facteurs de  $(ad)^k$ , dans le développement de  $P_n$ , pour toutes les valeurs de  $n$ .

*Exemple.* — Termes en  $a^3 d^2$  dans  $P_n$ . La troisième ligne du triangle arithmétique est

1 3 6 10 15 ...;

nous formons le tableau

|     |     |    |     |    |    |    |          |
|-----|-----|----|-----|----|----|----|----------|
| $n$ |     |    |     |    |    |    |          |
| 5   | ... | 1  | 3   | 6  | 10 | 15 | ... $m'$ |
| 6   | ... | 3  | 9   | 18 | 30 | 45 |          |
| 7   | ... | 6  | 18  | 36 | 60 |    |          |
| 8   | ... | 10 | 30  | 60 |    |    |          |
| 9   | ... | 15 | 45  |    |    |    |          |
| .   | ... | .  | .   | .  |    |    |          |
|     |     |    | $m$ |    |    |    |          |

et nous aurons, par exemple,

$$P = a \left[ \frac{b^2 - c^2}{b - c} + (\dots) ad + (6b^2 + 9bc + 6c^2) a^2 d^2 + \dots \right].$$

A chaque puissance de  $ad$  correspond un tableau distinct qui sert pour toutes les valeurs de  $n$ .

La règle pour les termes du développement de  $Q_n$  est analogue.

*Pour  $Q_n$ .* Former la table de Pythagore avec la  $(k + 1)^{\text{ième}}$  colonne et la  $k^{\text{ième}}$  ligne du triangle de Pascal : les hypoténuses donneront les termes facteurs de  $(ad)^k$ .

*Exemple.* — Termes en  $a^2 d^2$  dans  $Q_n$ . Nous prenons la troisième colonne de la deuxième ligne

|     |     |    |     |    |            |
|-----|-----|----|-----|----|------------|
| $n$ |     |    |     |    |            |
| 4   | ... | 1  | 2   | 3  | 4 ... $m'$ |
| 5   | ... | 3  | 6   | 9  | 12         |
| 6   | ... | 6  | 12  | 18 |            |
| 7   | ... | 10 | 20  | 30 |            |
| .   | ... | .  | .   | .  |            |
|     |     |    | $m$ |    |            |

et nous aurons

$$Q_n = b_n + (\dots) ad + (6b^2 + 6bc + 3c^2) a^2 d^2 + \dots$$

Les égalités (9) et (10) expriment que la somme des nombres de chaque hypoténuse dans les deux Tables donne un nombre figuré du triangle arithmétique.

On obtient aisément, par la règle précédente,

$$P_2 = a(b + c), \quad Q_2 = b^2 + ad;$$

$$P_3 = a(b^2 + bc + c^2 + ad),$$

$$Q_3 = b^3 + (2b + c)ad;$$

$$P_4 = a \left[ \frac{b^4 - c^4}{b - c} + (2b + 2c)ad \right],$$

$$Q_4 = b^4 + (3b^2 + 2bc + c^2)ad + a^2d^2;$$

$$P_5 = a \left[ \frac{b^5 - c^5}{b - c} + (3b^2 + 4bc + 3c^2)ad + a^2d^2 \right],$$

$$Q_5 = b^5 + (4b^3 + 3b^2c + 2bc^2 + c^3)ad + (3b + 2c)a^2d^2;$$

$$P_6 = a \left[ \frac{b^6 - c^6}{b - c} + (4b^3 + 6b^2c + 6bc^2 + 4c^3)ad + (3b + 3c)a^2d^2 \right],$$

$$Q_6 = b^6 + (5b^4 + 4b^3c + 3b^2c^2 + 2bc^3 + c^4)ad + (6b^2 + 6bc + 3c^2)a^2d^2 + a^3d^3;$$

$$P_7 = a \left[ \frac{b^7 - c^7}{b - c} + (5b^4 + 8b^3c + 9b^2c^2 + 8bc^3 + 5c^4)ad + (6b^2 + 9bc + 6c^2)a^2d^2 + a^3d^3 \right],$$

$$Q_7 = b^7 + (6b^5 + 5b^4c + 4b^3c^2 + 3b^2c^3 + 2bc^4 + c^5)ad + (10b^3 + 12b^2c + 9bc^2 + 4c^3)a^2d^2 + (4b + 3c)a^3d^3;$$

.....

*Remarque.* — Dans ces formules, la somme des coefficients doit toujours être égale à  $2^{n-1}$ ; formules (3) et (4), ou directement par la loi même de formation.

---