BULLETIN DE LA S. M. F.

A. MANNHEIM

Nouvelles propriétés de quelques courbes

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 158-159
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__158_0>

Nouvelles propriétés de quelques courbes; par M. A. MANNHEIM.

(Séance du 17 mai 1876.)

Dans la séance du 19 avril dernier, M. Halphen a fait connaître quelques propriétés de certaines courbes dont M. Haton a donné une intéressante monographie dans le numéro de mars 1876 des *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

Je me propose d'énoncer quelques propriétés de ces courbes et de quelques autres.

Aux auteurs cités par M. Haton, nous ajouterons M. Archer Hirst, qui, dans son beau Mémoire *Sur la courbure d'une série de surfaces et de lignes,* a aussi étudié les courbes dont l'équation polaire est

$$r = a \cos^{\varepsilon} \frac{a}{\varepsilon}.$$

M. Hirst désigne ces courbes par la lettre E. Nous adopterons cette notation et nous appellerons B la courbe dont M. Bonnet s'est occupé et qui est engendrée par le pôle de E lorsque cette courbe roule sur une droite D.

Cette génération de B conduit immédiatement à cette propriété :

Les rayons de courbure d'une courbe B *sont partagés par* D *dans un rapport constant.*

On sait, en vertu d'un théorème de Steiner, que l'arc de la roulette, engendrée par un point du plan d'une courbe qui roule sur une droite, est égal à l'arc de la podaire de la courbe mobile par rapport au point décrivant. Il résulte de là et de cette propriété : la podaire d'une courbe E, par rapport à son pôle, est une courbe E, que :

Les arcs d'une courbe B *sont exprimables en arcs d'une courbe* E.

Il est facile de construire le centre de courbure de la développée d'une courbe E ou d'une courbe B. Au moyen de ces constructions et de quelques considérations géométriques, on arrive aux résultats suivants :

Le lieu des positions successives des centres de courbure d'une *courbe* E *qui roule sur une droite est une courbe que l'on obtient en dilatant dans un rapport constant les ordonnées d'une courbe* B.

Les centres de courbure que l'on considère dans cet énoncé sont ceux qui, à chaque instant, correspondent aux points de contact de E et de D; quant aux ordonnées de B, ce sont les distances des points de cette courbe à la droite D.

Lorsqu'une courbe B *roule sur une droite, l'enveloppe de sa base* D *est une courbe* B.

Lorsqu'une courbe B *roule sur une courbe qui lui est égale et symétrique par rapport à l'une de ses tangentes, sa base* D *enveloppe une certaine courbe; les arcs de cette courbe sont exprimables en arcs d'une courbe* B;

Elle peut être considérée comme le lieu des points qui partagent dans un rapport constant les rayons de courbure d'une courbe B.

Comme cas particulier, on peut considérer l'enveloppe de la base d'une cycloïde qui roule sur une cycloïde qui lui est égale et symétrique par rapport à l'une de ses tangentes : on trouve que cette enveloppe est une développante de cycloïde.

Le lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe B *qui roule sur une droite est une courbe que l'on obtient en dilatant dans un rapport constant les ordonnées d'une courbe* B.

En un point quelconque d'une courbe B, *on mène la tangente et la normale à cette courbe. Du point où la normale rencontre* D, *on élève une perpendiculaire à cette droite; cette perpendiculaire rencontre la tangente en un certain point : le lieu des points analogues est une courbe que l'on obtient en dilatant les ordonnées d'une courbe* B.

On projette : 1° *un point quelconque m d'une courbe* B *sur la droite* D; 2° *le pied de cette perpendiculaire sur la tangente en m à* B : *le lieu des points analogues à celui que l'on obtient ainsi est une courbe qui partage dans un rapport constant les rayons de courbure d'une courbe* B.

On arrive encore à quelques énoncés très-simples en considérant les courbes lieu des extrémités des droites égales et parallèles aux rayons de courbure d'une courbe E ou d'une courbe B.