BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur les courbes gauches et sur la valeur de la torsion en un point d’une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 160-163

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__160_0>

Sur les courbes gauches et sur la valeur de la torsion en un point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre; par M. LAGUERRE.

(Séance du 17 mai 1876.)

1. Considérons une courbe gauche quelconque rapportée à trois axes rectangulaires et dont les équations soient $x=X$, $y=Y$, $z=Z$, X, Y et Z étant trois fonctions données d'une même variable indépendante t. En chaque point m de cette courbe, menons une droite $m\mu$ normale à cette courbe et dont la longueur, ainsi que la direction, soit fixée à chaque instant par la valeur de la variable t correspondant au point m. Projetons ensuite sur la corde mm' les segments normaux $m\mu$ et $m'\mu$ menés respectivement par les extrémités de cette corde; je me propose d'abord d'évaluer la somme algébrique de ces projections.

En désignant par ω cette somme, par A, B, C les dérivées de X, ,Y Z par rapport à t et par L, M, N les projections sur les axes du segment $m\mu$, on a évidemment

$$\begin{aligned} \mathrm{MM}'.\,\omega &= \sum\left(dx+\frac{d^2x}{1.2}+\frac{d^3x}{1.2.3}\cdots\right)\left(2\,\mathrm{L}+d\mathrm{L}+\frac{d^2\,\mathrm{L}}{1.2}\;\cdots\right) \\ &= \sum\left(\mathrm{A}\,dt+\frac{\mathrm{A}'\,dt^2}{1.2}+\frac{\mathrm{A}''\,dt^3}{1.2.3}\cdots\right)\left(2\mathrm{L}+d\mathrm{L}+\frac{d^2\,\mathrm{L}}{1.2}\cdots\right). \end{aligned}$$

Je poserai, pour abréger,

$$\mathrm{MM}'.\,\omega = \mathrm{P}_1\,\frac{dt^2}{1.2}+\mathrm{P}_2\,\frac{dt^3}{1.2.3}+\cdots+\frac{\mathrm{P}_n\,dt^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}+\cdots, \tag{1}$$

le coefficient de dt étant nul dans ce développement, en vertu de l'équation $\Sigma\mathrm{AL}=0$, qui exprime que le segment est normal à la courbe.

2. Des considérations très-simples montrent immédiatement que chaque coefficient d'ordre pair P_{2n} s'exprime linéairement au moyen des coefficients d'ordre inférieur et de leurs dérivées; il s'annule donc en même temps que ces derniers; par suite, la formule (1) montre que ω ne peut être qu'un infiniment petit d'*ordre impair*.

P_1 et P_2 étant identiquement nuls, on voit que généralement la quantité ω sera du troisième ordre ; si elle est d'un ordre supérieur, elle sera du cinquième ordre et l'équation suivante devra être satisfaite :

$$\Sigma A'' L + 3 \Sigma A' L' = 0. \tag{2}$$

Si elle est d'un ordre supérieur au cinquième, elle sera du septième, avec la condition suivante :

$$\Sigma A^{\text{IV}} L + 5 \Sigma A''' L' + 10 \Sigma A'' L'' = 0. \tag{3}$$

Enfin, si elle est d'un ordre supérieur au septième, elle sera *identiquement nulle,* avec la condition

$$\Sigma A^{\text{VI}} L + 7 \Sigma A^{\text{V}} L' + 21 \Sigma A^{\text{IV}} L'' + 35 \Sigma A''' L''' = 0, \tag{4}$$

et alors la courbe *pourra être placée sur une surface du second ordre.*

3. Si l'on se propose, étant donnée une courbe, de trouver un système de segments normaux ayant cette courbe pour base et tels que ω soit une quantité infiniment petite du septième ordre, on devra déterminer les segments par les équations (2) et (3).

Je les transformerai d'abord en définissant, en chaque point de la courbe, le segment normal par ses deux projections U et W sur la normale principale et sur la binormale en ce point. En désignant, suivant l'usage habituel, par ρ et par r le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe au point considéré, et en prenant l'arc s comme variable indépendante, les formules (2) et (3) se mettront facilement, au moyen des formules de M. Serret, sous la forme suivante :

$$\mathrm{U}\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) + 3\frac{d\mathrm{U}}{\rho} + \frac{2}{r\rho}\mathrm{W}\, ds = 0, \tag{2$'$}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&10\, d^2\mathrm{U}\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) - 10\frac{d^2\mathrm{W}\, ds}{r\rho} + 5\, d\mathrm{U}\left[d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) ds^2\right] \\
&\quad + 5\, d\mathrm{W}\, ds\left[\frac{2}{r} d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho} d\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\
&\quad + \mathrm{U}\left[d^3\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{9}{\rho^2} - \frac{3}{r^2}\right) ds^2\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{12\, ds^2}{r\rho} d\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\
&\quad + \mathrm{W}\, ds\left[\frac{2}{r} d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho} d^2\left(\frac{1}{r}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 7\, d\left(\frac{1}{r}\right) d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{6}{r\rho}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) ds^2\right] = 0.
\end{aligned}\right. \tag{3$'$}$$

En éliminant W entre les deux équations précédentes, on obtiendra une équation linéaire et du troisième ordre pour déterminer U; on voit donc que, la courbe étant donnée, le problème que je m'étais proposé a une infinité de solutions, qui toutes peuvent se déduire de trois solutions indépendantes, conséquence à laquelle quelques propositions géométriques très-simples conduiraient directement.

4. Laissant de côté ces considérations générales, ainsi que les conséquences qui en découlent relativement aux équations différentielles (entre r, ρ et s) qui définissent les courbes que l'on peut tracer sur une surface de second ordre, les biquadratiques gauches (par lesquelles on peut faire passer une infinité simple de surfaces du second ordre), et les cubiques gauches (par lesquelles on peut faire passer une infinité double de surfaces du second ordre), je vais rechercher quelles sont les courbes que l'on peut prendre comme base de segments normaux dirigés suivant *les normales principales de la courbe* et jouissant de la propriété que ω soit du septième ordre.

On devra, dans les équations précédentes, poser $W = 0$; l'équation $(2)'$ s'intègre alors immédiatement et donne

$$U = \alpha \rho^{\frac{1}{3}},$$

α désignant une constante arbitraire. Portons cette valeur de U dans l'équation $(3)'$; il vient, toutes réductions faites,

$$(5)\left\{\begin{aligned} &9\, d^3\left(\frac{1}{\rho}\right) - 45\rho\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) d^2\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{36}{\rho^2} ds^2\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ &+ 40\rho^2\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)^3 + 18\, ds^2\left[\frac{6}{r\rho}\, d\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{4}{r^2}\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Il est remarquable que cette équation puisse s'intégrer sans établir aucune relation entre ρ et r; si on l'intègre en effet en considérant $\frac{1}{r}$ comme la fonction inconnue (ce qui ne présente aucune difficulté), on trouve que la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, et l'on obtient l'intégrale suivante :

$$(6) \qquad 1 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) = C\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{4}{3}} - 3\rho\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds^2} + 4\rho^2\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)^2}{ds^2},$$

C désignant une constante arbitraire.

Telle est la relation qui doit exister entre la torsion et la courbure d'une courbe pour qu'elle jouisse de la propriété énoncée ci-dessus.

5. En particulier, on peut remarquer que, si une ligne géodésique est tracée sur une surface du second ordre quelconque, en portant en chaque point de la courbe sur la normale principale une longueur proportionnelle à $\sqrt[3]{\rho}$, les segments ainsi obtenus jouissent de la propriété que la somme algébrique des projections de deux d'entre eux, sur la corde qui joint leurs pieds, est identiquement nulle ; la quantité que j'ai appelée ω étant nulle, on voit qu'en chaque point d'une telle ligne géodésique la torsion est donnée par la relation (6), la constante C ayant une valeur convenablement déterminée.