BULLETIN DE LA S. M. F.

H. BROCARD

Sur la détermination d'une courbe par une propriété de ses tangentes

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 42-44
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__42_0>

Sur la détermination d'une courbe par une propriété de ses tangentes; par M. H. Brocard.

(Séance du 15 décembre 1875.)

Voici un exemple très-simple d'une détermination de ce genre, qui offre un certain intérêt.

Soient YOX [1] un système d'axes de coordonnées rectangulaires, MT une tangente en un point M d'une courbe MC, A, A′ deux points de OX symétriques par rapport à l'origine et à une distance a, B, B′ leurs projections sur MT; DM l'ordonnée de M, OD son abscisse.

1. On donne, en premier lieu, la condition

$$\mathrm{AB} - \mathrm{A'B'} = \mathrm{DM}. \tag{1}$$

L'équation de la tangente MT étant

$$\mathrm{Y} - y = \frac{dy}{dx}(\mathrm{X} - x),$$

la condition (1) devient, en posant $\frac{dy}{dx} = p$,

$$\frac{y}{p}\sqrt{1+p^2} = 2a,$$

qui exprime que la tangente MT a une longueur constante $2a$. La courbe cherchée est donc une *tractrice* ou *courbe aux tangentes égales*.

Cette courbe est également :

1° La développante de la *chaînette*

$$y = a\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}\right);$$

2° La trajectoire orthogonale des circonférences

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2$$

de rayon $2a$;

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

3° La trajectoire du point M entraîné par un fil inextensible MT, dont l'extrémité T décrit OX.

Ainsi, dans une tractrice, la différence des distances, à une tangente, des points de OX *situés à une distance de l'origine égale à la moitié du paramètre de la courbe, est égale à l'ordonnée du point de contact.*

C'est, au reste, ce que l'on peut démontrer aisément par de simples considérations géométriques.

Soit E la projection de A' sur AB. On a

$$EA = AB - A'B'.$$

Les deux triangles rectangles MDT, AA'E sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale, $MT = 2a = AA'$, et l'angle $\widehat{EA'A} = \widehat{MTD}$. Ainsi $EA = MD$.

Remarque. — Soient I le milieu de MD, C sa projection sur MT. Le point E est évidemment sur la ligne EC parallèle à AA'.

De ce qui précède, on déduit une construction de la tangente à la tractrice en un point donné M. Pour l'obtenir, on décrit une circonférence A'EA, ayant O pour centre et la moitié du paramètre pour rayon. Du point A, on mène la corde $AE = MD$. La tangente MT est perpendiculaire à la corde EA, prolongée s'il est nécessaire. Comme vérification, on doit avoir

$$MT = AA' = 2a.$$

2. On donne, en second lieu, la condition

$$A'B' - AB = OD$$

ou

$$\frac{2ap}{\sqrt{1+p^2}} = x,$$

équation différentielle d'une circonférence

$$x^2 + y^2 = 4a^2$$

de rayon $2a$, sur le diamètre XOX' de laquelle on a pris deux points A, A', à une distance a de l'origine, moitié du rayon.

Ainsi, dans une circonférence de cercle, la différence des dis-

tances, à une tangente, des points du diamètre situés à une distance du centre égale à la moitié du rayon du cercle, est égale à l'abscisse du point de contact.

Il est encore très-facile d'établir cette propriété de la circonférence.

Conservant les mêmes notations, les deux triangles MOD, AEA' sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale, $OM = 2a = AA'$ et l'angle $\widehat{EA'A} = \widehat{MOD}$. Ainsi $A'E = OD$.

3. On peut rapprocher de cet exemple la propriété suivante de la parabole, dont OX est l'axe et O le foyer :

$$\overline{AB}^2 - \overline{A'B'}^2 = \text{const.},$$

qui fait l'objet de la question 1165, que j'ai proposée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* et qui a été résolue p. 285, année 1875, de ce même Recueil.

4. La condition

$$\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = \text{const.} = 2b^2$$

aurait donné

$$\frac{(px - y)^2 + p^2a^2}{1 + p^2} = b^2$$

ou

$$p^2(x^2 + a^2 - b^2) - 2pxy + y^2 - b^2 = 0;$$

d'où l'hyperbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2 - a^2} = -1,$$

enveloppe de la droite

$$y = px \pm \sqrt{b^2(1 + p^2) - a^2p^2}.$$

Cette hyperbole a ses foyers sur XOX'.