BULLETIN DE LA S. M. F.

S. V. TURQUAN

Sur l’intégration de quelques équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 40-46
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__40_1>

Sur l'intégration de quelques équations différentielles; par L. V. Turquan.

(Séance du 25 février 1874)

J'ai intégré quelques équations différentielles en les convertissant en équations aux différences partielles d'une fonction de deux variables. Ce procédé peut paraître détourné, mais n'a rien qui puisse surprendre, car on sait trouver les intégrales générales de plusieurs équations aux différences partielles, tandis que certaines équations différentielles ordinaires n'ont pu encore être intégrées en termes finis, c'est-à-dire ramenées à des quadratures. Ce procédé peut d'ailleurs, dans certains cas, donner les intégrales d'équations différentielles qui résistent aux procédés connus jusqu'ici. Un des exemples que je traite est, je crois, dans ce cas.

1° Soit

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{1}$$

une équation différentielle du premier ordre, algébrique et d'un degré quelconque par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Je poserai

$$z = Ty,$$

T étant une fonction connue quelconque d'une nouvelle variable t. J'aurai

$$\frac{dz}{dx}=p=\mathrm{T}\frac{dy}{dx},\quad \text{d'où}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{p}{\mathrm{T}},$$

$$\frac{dz}{dt}=q=\frac{d\mathrm{T}}{dt}y,\quad \text{d'où}\quad y=q:\frac{d\mathrm{T}}{dt}.$$

Je porte ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de y dans l'équation (1), qui devient ainsi une équation aux différences partielles de z, mais qui ne contient pas cette fonction, savoir

$$\varphi(x,t,p,q)=0. \tag{2}$$

Or Lagrange a fait dépendre l'intégration de l'équation (2) de celle des équations aux différences partielles simultanées

$$\frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{d\varphi}{dq}\frac{dp}{dt}=-\frac{d\varphi}{dx}, \tag{3}$$

$$\frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{d\varphi}{dq}\frac{dq}{dt}=-\frac{d\varphi}{dt}, \tag{4}$$

dans lesquelles p et q désignent deux fonctions des variables indépendantes x et t. Ces deux fonctions p et q doivent satisfaire en outre à la condition $dz=pdx+qdt$, ou vérifier les relations

$$\frac{dz}{dx}=p,\quad \frac{dz}{dt}=q.$$

Si on pose les équations

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dp}}=\frac{dt}{\frac{d\varphi}{dq}}=\frac{-dp}{\frac{d\varphi}{dx}}=\frac{-dq}{\frac{d\varphi}{dt}}, \tag{5}$$

et qu'on en tire deux intégrales particulières

$$f_1(x,t,p,q)=a_1,\quad f_2(x,t,p,q)=a_2, \tag{6}$$

dont l'équation (2) ne soit pas un cas particulier, et a_1, a_2 étant deux constantes arbitraires, le système de ces deux intégrales constituera une intégrale particulière des équations (3) et (4); car on peut vérifier qu'elles fournissent des valeurs de $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dt}$, qui satisfont aux équations (3) et (4).

D'ailleurs on a aussi

$$\frac{dpdx+dqdt-dpdx-dqdt}{\frac{d\varphi}{dp}dp+\frac{d\varphi}{dq}dq+\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dt}dt}=\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dp}}=\dots, \tag{7}$$

et comme le numérateur du premier des rapports égaux (7) est nul, le dénominateur du même rapport,

$$\frac{d\varphi}{dp}dp + \frac{d\varphi}{dq}dq + \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dt}dt,$$

doit être nul aussi. Ce qui fait voir que l'équation (2) est aussi une intégrale particulière des équations (5).

On a en outre

$$(8) \qquad p = \mathrm{T}\frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{d\mathrm{T}}{dt}y;$$

par conséquent, si, entre les équations (2), (6) et (8), on élimine p, q, t et $\frac{dy}{dx}$, on aura une relation entre x, y et deux constantes arbitraires

$$(9) \qquad f(x,y,a_1,a_2) = 0,$$

qui devra renfermer comme cas particulier l'intégrale de l'équation proposée $\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, et qui deviendra cette intégrale, si on établit entre les constantes une relation convenable.

Cette relation doit être telle que si on différentie $f(x,y,a_1,a_2) = 0$ pour en tirer $\frac{dy}{dx}$, et porter cette dérivée de y dans l'équation proposée $\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, on trouve une identité. Donc l'équation (1), après qu'on aura effectué ces opérations, se changera en une équation entre les deux constantes a_1, a_2, seulement, qui sera la relation cherchée.

On voit qu'on pourra obtenir par cette méthode l'intégrale d'une équation différentielle donnée, chaque fois qu'on pourra obtenir deux intégrales particulières du système

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dp}} = \frac{dt}{\frac{d\varphi}{dq}} = \frac{-dp}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{-dq}{\frac{d\varphi}{dt}},$$

et distinctes de $\varphi(x, t, p, q) = b$.

On choisira la fonction T de manière à faciliter les intégrations. J'ai pris ordinairement $\mathrm{T} = t$, ou $\mathrm{T} = e^t$.

2° *Premier exemple :* Intégration de l'équation

$$\frac{dy^n}{dx^n} + by^n = e^{ax}.$$

Je fais

$$z = ye^t,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = pe^{-t},\ y = qe^{-t}.$$

L'équation proposée devient ainsi

$$p^n + bq^n = e^{ax+nt}.$$

Je poserai ensuite

$$\frac{dx}{np^{n-1}} = \frac{dq}{nbq^{n-1}} = \frac{dp}{ae^{ax+nt}} = \frac{dq}{ne^{ax+nt}},$$

équations d'où l'on tire

$$dp = \frac{adq}{n}, \quad \text{puis} \quad p = \frac{aq+c}{n},$$

c étant une constante.

J'ai aussi

$$\frac{pdx + qdt}{n(p^n + bq^n)} = \frac{dq}{ne^{ax+nt}},$$

d'où

$$pdx + qdt = dq.$$

On peut éliminer pdx, car

$$pdx = \frac{p^n dt}{bq^{n-1}} = \frac{(aq+c)^n dt}{bq^{n-1}}.$$

Ainsi

$$\frac{(aq+c)^n}{n^n bq^{n-1}} dt + qdt = dq,$$

$$dt = \frac{n^n bq^{n-1} dq}{(aq+c)^n + n^n bq^n},$$

et

$$t = \int \frac{n^n bq^{n-1} dq}{(aq+c)^n + n^n bq^n},$$

la constante arbitraire étant renfermée sous le signe $\int$.

Alors, remplaçant dans $p^n + bq^n = e^{ax+nt}$, p et t par leurs valeurs en fonction de q, on aura

$$(1) \qquad \frac{(aq+c)^n}{n^n} + bq^n = e^{ax+n\int \frac{n^n bq^{n-1} dq}{(aq+c)^n + n^n bq^n}},$$

ce qui donne une relation entre x et q.

On a aussi

$$y = qe^{-t},$$

d'où

$$(2) \qquad y = qe^{-\int \frac{n^n b q^{n-1} dq}{(aq+c)^n + n^n b q^n}},$$

ce qui donne une relation entre y et q. Il n'y aura plus qu'à éliminer q entre (1) et (2) pour avoir l'intégrale demandée. On peut aussi regarder les équations (1) et (2) comme représentant cette intégrale, et la question est ramenée à de simples quadratures.

3° *Deuxième exemple* : Intégration de

$$A\frac{dy^n}{dx^n} + A_1 X y \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + A_2 X^2 y^2 \frac{dy^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + A_{n-1} X^{n-1} y^{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n X^n y^n = 0,$$

où X représente une fonction quelconque de la variable x, et $A, A_1, A_2, \ldots, A^{n-1}, A_n$ des nombres quelconques.

Je fais

$$z = ye^t,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = pe^{-t}, \quad y = qe^{-t}.$$

Par là il vient

$$(1) \qquad Ap^n + A_1 X p^{n-1} q + A_2 X^2 p^{n-2} q^2 + \ldots + A_{n-1} X^{n-1} p q^{n-1} + A_n X^n q^n = 0.$$

Je pose

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{nAp^{n-1} + (n-1)A_1 X p^{n-2} q + \ldots + A_{n-1} X^{n-1} q^{n-1}} \\
&= \frac{dt}{A_1 X p^{n-1} + 2A_2 X^2 p^{n-2} q + \ldots + nA_n X^n q^{n-1}} \\
&= \frac{-dp}{X'(A_1 p^{n-1} q + 2A_2 X p^{n-2} q^2 + \ldots + nA_n X^{n-1} q^n} = \frac{-dq}{0}.
\end{aligned}$$

On voit d'abord que

$$pdx + qdt = 0,$$

que

$$\frac{qdt}{X} = -\frac{dp}{X'},$$

d'où $pdx = \frac{Xdp}{X'}$, et, par suite, $p = cmX$, c étant une constante arbitraire, et m une racine de l'équation

$$(2) \qquad Au^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots + A_{n-1} u + A_n = 0.$$

On a aussi $dq = 0$, d'où $q = c_1$, c_1 étant une nouvelle constante. Ces valeurs de p et q, portées dans l'équation (1), donnent

$$\mathrm{A}c^n m^n \mathrm{X}^n + \mathrm{A}_1 c^{n-1} c_1 \mathrm{X}^n m^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1} c c_1^{n-1} m \mathrm{X}^n + \mathrm{A}^n c_1^n \mathrm{X}^n = 0,$$

ou

$$\mathrm{A}\left(\frac{c}{c_1}\right)^n m^n + \mathrm{A}\left(\frac{c}{c_1}\right)^{n-1} m^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\left(\frac{c}{c_1}\right) m + \mathrm{A}_n = 0,$$

d'où l'on voit que $c = c_1$.

D'autre part, l'équation $pdx + qdt = 0$, si l'on tient compte des résultats obtenus, devient

$$cdt = -pdx = -cm\mathrm{X}dx,$$

d'où

$$t = -m\int \mathrm{X}dx,\quad e^t = e^{-m\int \mathrm{X}dx}.$$

Comme $y = qe^{-t}$, on a

$$y = ce^{m\int \mathrm{X}dx}.$$

Nous pouvons supposer la constante qui doit accompagner $\int \mathrm{X}\,dx$ contenue dans c; je vois donc que $m = \dfrac{\log \frac{y}{c}}{\int \mathrm{X}\,dx}$.

Enfin, m étant une racine de l'équation (2), j'ai pour l'intégrale demandée

$$\mathrm{A}\left(\frac{\log \frac{y}{c}}{\int \mathrm{X}dx}\right)^n + \mathrm{A}_1\left(\frac{\log \frac{y}{c}}{\int \mathrm{X}dx}\right)^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\frac{\log \frac{y}{c}}{\int \mathrm{X}dx} + \mathrm{A}_n = 0.$$

On peut arriver plus simplement à ce résultat. On pose

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = my\mathrm{X},$$

et l'on voit que cette valeur de $\dfrac{dy}{dx}$ satisfera à l'équation proposée, si m est racine de l'équation (2). Or, en intégrant l'équation (3), on trouve

$$y = ce^{m\int \mathrm{X}dx},$$

d'où $m = \dfrac{\log \frac{y}{c}}{\int \mathrm{X}\,dx}$; et cette valeur de m, portée dans (2), donnera l'intégrale cherchée. C'est celle que nous avons trouvée.

4° *Remarque.* — Si l'on a

$$A\frac{dy^n}{dx^n}+A_1f(x,y)\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}}+A_2f(x,y)^2\frac{dy^{n-2}}{dx^{n-2}}+\dots+A_{n-1}f(x,y)^{n-1}\frac{dy}{dx}+A_nf(x,y)^n=0,$$

on fera $\frac{dy}{dx}=mf(x,y)$, m étant une racine de

$$Au^n+A_1u^{n-1}+A_2u^{n-2}+\dots+A_{n-1}u+A_n=0\,;$$

et si l'on sait intégrer $\frac{dy}{dx}=mf(x,y)$, on aura une équation entre x, y, m et une constante arbitraire. L'élimination de m entre cette équation et la suivante

$$Am^n+A_1m^{n-1}+A_2m^{n-2}+\dots+A_{n-1}m+A_n=0,$$

donnera l'intégrale de l'équation proposée.

Si, par exemple, on a

$$A\frac{dy^n}{dx^n}+A_1\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}}+\dots+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_n=0,$$

on posera $\frac{dy}{dx}=m$, d'où $y-c=mx$ et $m=\frac{y-c}{x}$, et l'intégrale demandée sera

$$A\left(\frac{y-c}{x}\right)^n+A_1\left(\frac{y-c}{x}\right)^{n-1}+\dots+A_{n-1}\frac{y-c}{x}+A_n=0.$$

QUESTIONS

Trouver tous les couples de courbes qui jouissent de la propriété suivante : D'un point quelconque de l'espace, les deux courbes paraissent se couper à angle droit? (MANNHEIM.)

Étant donnée une courbe dont on connaît le degré, la classe et les singularités, étudier le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe deux tangentes égales. Déterminer son degré, sa classe et ses singularités.

Même question, les tangentes égales étant menées à deux courbes distinctes. (LAGUERRE.)
