BULLETIN DE LA S. M. F.

H. BROCARD

Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant

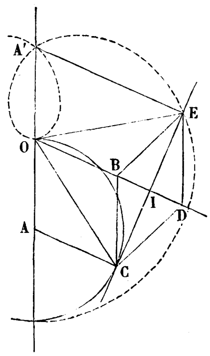
Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 47-48

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__47_0>

Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant; par M. H. Brocard.

(Séance du 31 mars 1875)

A l'occasion d'un récent mémoire que j'ai publié, relatif à *Divers problèmes de géométrie dont la solution dépend de la trisection de l'angle*, mémoire que j'ai l'honneur de présenter à la Société mathématique, M. Laisant m'a fait connaître un moyen très-ingénieux de diviser un angle quelconque en trois parties égales, en se servant d'un compas articulé, d'une construction très-simple, ainsi que l'on en pourra juger.



Soient OABC, BEDC, deux losanges articulés, OBD une tige rigide sur laquelle l'articulation D peut glisser. Comme la diagonale CE est divisée en deux parties égales au point I, et qu'elle est perpendiculaire à OD, on en conclut que les angles IOC, IOE sont égaux. Mais le point C se trouve sur la bissectrice OC de l'angle IOA, ainsi l'angle COA est égal aux deux autres angles, et par suite l'angle EOA est divisé en trois parties égales par les droites OI, OC.

Menons EA′ parallèle à OI et par suite perpendiculaire à IE. Comme IE = IC, OA′ = OA; mais le lieu du point C est une circonférence ayant A pour centre et CE pour tangente au point C. Le lieu du point E est donc la *podaire* de cette circonférence, le point A′ étant le point fixe. Ce lieu est donc un *limaçon de Pascal.*

On peut rapprocher de ces remarques celles que M. Jouanne a exposées dans les *Nouvelles annales de mathématiques* (2e série, t. IX, année 1870, p. 40). Voici, en effet, ce que dit M. Jouanne :

Pour diviser l'angle EOA en trois parties égales, de part et d'autre du point O, l'on prend sur OA et sur son prolongement OA′ deux longueurs OA, OA′ égales. Du point A comme centre, avec OA pour rayon, on trace une circonférence, dont la *podaire* par rapport au point A′ est un *limaçon de Pascal.* Du point E, où le côté OE rencontre cette courbe, on mène une tangente EC à la circonférence. La ligne CO, qui joint le sommet de l'angle au point de contact, forme l'angle $\mathrm{COA} = \frac{\mathrm{EOA}}{3}$.

En effet, le point E étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point A′ sur la tangente EC, les lignes EA′, OI, AC sont parallèles, et comme OA = O′A, on a aussi CI = IE. Mais les angles IOC, OCA sont égaux, de plus OCA = COA. Ainsi IOC = COA. De plus, IOC = IOE = OEA′. Donc COA est bien le tiers de EOA.

M. Peaucellier a fait connaître, dans les *Nouvelles annales* (2e série, t. XII, année 1873, p. 77), une série de compas articulés, dont l'un peut servir au tracé géométrique du *limaçon de Pascal*, en le considérant comme la *courbe réciproque d'une section conique*. Ces systèmes articulés fournissent ainsi une solution de la *trisection de l'angle*.

Néanmoins, dans la question spéciale que nous avons en vue, le *compas trisecteur* de M. Laisant me paraît préférable à toute autre combinaison, et il donne une solution tout à fait pratique de la *trisection de l'angle*, dans les mêmes conditions que celles où le compas ordinaire donne la bissection de l'angle ou de l'arc.

Il sera très-facile de réaliser un compas trisecteur, en réduisant à ses pièces essentielles le système articulé proposé par M. Laisant. On conservera les deux losanges articulés OBAC, BCDE et l'articulation à glissière D, mobile sur la règle OD.

Le compas trisecteur dont je viens de donner la description méritait, comme on le voit, une mention spéciale, et c'est pourquoi j'ai cru devoir le faire connaître à la Société mathématique, en le signalant à toute son attention.

Voici enfin, au sujet de la question, un détail historique d'un certain intérêt :

La trisection de l'angle au moyen du *limaçon de Pascal* fait l'objet d'un opuscule, publié à Paris en 1809, intitulé : *Trisection de l'angle*, par Azémar, suivie de *Recherches analytiques sur le même sujet*, par Garnier. L'auteur emploie uniquement le *limaçon de Pascal*, sans donner ce nom à la courbe trisectrice. Il en fait une description très-détaillée, dans l'étude analytique de laquelle on trouve les équations en coordonnées rectilignes et polaires, ainsi que la valeur du rayon de courbure, de l'arc et de la surface. Il fait connaître aussi l'énoncé et la démonstration d'une propriété du cercle, découverte par Archimède, et qui a mis sur la voie des recherches. Cette propriété n'est autre que celle qui est rappelée dans l'extrait de l'article de M. Jouanne.