G. FOURET

Résolution graphique d'un système d'équations de premier degré

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 93-95
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__93_0>

Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré;
par M. G. Fouret.

(Séance du 2 mars 1875)

M. Chasles, dans son *Traité de géométrie supérieure* (p. 224), a donné une méthode de *fausse position géométrique*, fondée sur la détermination des points doubles de deux divisions homographiques, pour résoudre un système d'équations du premier ou du second degré à plusieurs inconnues. En suivant le même ordre d'idées, je vais exposer brièvement, pour le cas d'un système d'équations du premier degré, une méthode graphique de fausse position, basée sur des procédés un peu différents de ceux donnés par M. Chasles. Les équations que je considère ont une forme plus générale, et la construction que j'obtiens présente l'avantage de fournir à la fois les valeurs de toutes les inconnues, au lieu de les déterminer isolément, comme le fait la méthode que je viens de rappeler.

Je m'appuierai sur le lemme suivant, très-facile à démontrer d'ailleurs.

Lemme. — *Si l'on désigne par x et y les distances parcourues respectivement par deux points mobiles sur deux droites* (X) *et* (Y), *à partir d'origines prises sur ces deux droites, et que x et y soient liés par une relation linéaire*

$$\alpha x + \beta y = \gamma, \tag{1}$$

les positions correspondantes des deux points mobiles déterminent sur les droites qu'ils décrivent des segments proportionnels. Si, de plus, (X) *et* (Y) *sont parallèles, les droites joignant les positions correspondantes des deux points mobiles coucourent en un même point. Le rapport des distances de ce dernier point aux droites* (X) *et* (Y) *est égal à* $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Considérons un système de n équations du premier degré à n inconnues $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; et supposons-le ramené à la forme

$$\tag{2} \left\{ \begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = l_1, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots\ldots\ldots = l_2, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \ldots\ldots = l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + h_4x_4 + \ldots + h_nx_n = l_{n-1}, \\ k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + \ldots + k_nx_n = l_n. \end{array} \right.$$

Introduisons dans la $n^{\text{ème}}$ équation une $(n+1)^{\text{ème}}$ variable x_{n+1} avec un coefficient arbitraire k_{n+1}. Cette équation deviendra

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + \ldots + k_nx_n + k_{n+1}x_{n+1} = l_n. \tag{3}$$

Imaginons maintenant que x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1} représentent les distances de $n+1$ points mobiles M_1, M_2, M_3, ..., M_n, M_{n+1}, à des origines fixes O_1, O_2, O_3, ..., O_n, O_{n+1}, sur autant de droites parallèles (X_1), (X_2), (X_3), ..., (X_n), (X_{n+1}), les distances parcourues simultanément par les points mobiles étant par conséquent liées par l'ensemble des $n-1$ premières équations (2) et de l'équation (3).

En éliminant de chaque équation toutes les variables moins les deux dernières, et remplaçant toutes les autres par leurs valeurs tirées des équations précédentes, on obtiendrait une relation linéaire telle que (1) entre les deux variables conservées. D'où l'on conclut, en vertu du lemme, que les n droites M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, ..., M_nM_{n+1} pivotent constamment autour d'autant de points fixes I_1, I_2, I_3, ..., I_n. Il est facile de construire n droites (Z_1), (Z_2), (Z_3), ..., (Z_n), parallèles aux droites (X) et contenant chacune un des points I. A cet effet, si l'on désigne d'une manière générale par ρ_p le rapport des distances de la droite (Z_p) aux droites (X_p) et (X_{p+1}), p pouvant recevoir toutes les valeurs entières de 1 à n inclusivement on a, pour déterminer les n rapports, le système d'équations

$$\begin{aligned}
a_1\rho_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\
b_1\rho_1\rho_2 + b_2\rho_2 + b_3 + \ldots\ldots\ldots &= 0,\\
c_1\rho_1\rho_2\rho_3 + c_2\rho_2\rho_3 + c_3\rho_3 + c_4 + \ldots &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
h_1\rho_1\rho_2 \ldots \rho_{n-1} + h_2\rho_2 \ldots \rho_{n-1} + \ldots + h_n &= 0,\\
k_1\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n + k_2\rho_2 \ldots \rho_n + \ldots + k_n\rho_n + k_{n+1} &= 0.
\end{aligned}$$

Ces équations se déduisent immédiatement des $n-1$ premières équations (2) et de l'équation (3), en se servant du lemme. Chacune d'elles fournit très-simplement l'un des rapports ρ, dès que l'on connaît les précédents.

Ayant construit les droites (Z), attribuons à x_1 une valeur choisie arbitrairement. La première des équations (2) détermine immédiatement une valeur correspondante de x_2, la deuxième équation une valeur correspondante de x_3, et ainsi de suite jusqu'à la $(n-1)^{\text{ème}}$ équation (2) qui donne une valeur de x_n. Enfin l'équation (3) donne une valeur correspondante de x_{n+1}. Si cette dernière quantité était nulle, l'ensemble des valeurs de x_1, x_2, ..., x_n, obtenues comme nous venons de l'indiquer, formerait la solution du système des équations (2). Il n'en sera pas ainsi généralement, puisque x_1 a été pris au hasard. Mais, ayant construit les valeurs calculées $x_1 = O_1M_1$, $x_2 = O_2M_2$, ..., $x_n = O_nM_n$, $X_{n+1} = O_{n+1}M_{n+1}$, on obtiendra les pivots I_1, I_2, ..., I_n, en prenant les points où M_1M_2, M_2M_3, ..., M_nM_{n+1} rencontrent respectivement (Z_1), (Z_2), ..., (Z_n). Puis on joindra $O_{n+1}I_n$ qui rencontrera (X_n) en un certain point P_n; pareillement P_nI_{n-1} coupera (X_{n-1}) en un point P_{n-1}, etc. On obtiendra ainsi de proche en proche une série de points P_n, P_{n-1}, ..., P_3, P_2, P_1, tels que l'ensemble des valeurs $x_1 = O_1P_1$, $x_2 = O_2P_2$, ..., $x_n = O_nP_n$ formera la solution du système des équations (2).

Remarques. — I. Les droites (X), dans ce qui précède, sont assujetties à la seule condition d'être parallèles. Mais on pourra, dans certains cas, choisir leur espacement, de manière à simplifier la construction des droites (Z).

II. Généralement, étant donné un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues, il sera nécessaire de lui faire subir une préparation préalable, de manière à le ramener à la forme du système (2), avant d'appliquer la méthode que nous venons d'exposer. Mais il se présentera souvent des cas dans lesquels les équations à résoudre se trouveront immédiatements écrite sous la forme convenable. Ce fait se présente par exemple pour le système d'équations qui détermine les moments fléchissants sur les appuis d'une poutre à plusieurs travées. L'application de notre méthode à ce cas intéressant a fait l'objet d'une note communiquée à l'Académie, dans sa séance du 1er mars. En m'aidant de quelques autres considérations fort simples, j'ai de plus été conduit à une construction purement géométrique de ces moments fléchissants, dont la détermination, dans le cas d'un certain nombre de travées, exige des calculs assez laborieux.