L. SALTEL

Sur la génération des cycliques et cyclides. Seconde note pour la génération des cycliques

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 95-100
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__95_1>

Sur la génération des cycliques et cyclides; par M. L. Saltel.

(Séance du 14 avril 1875)

PROBLÈMES PRÉLIMINAIRES.

Problème I. — *Étant donné dans un plan un cercle* S, *déterminer deux cercles passant respectivement par deux couples de points donnés* (A_1,B_1), (A_2,B_2) *et coupant le cercle* S *aux deux mêmes points? En d'autres termes, trouver deux cercles passant respectivement par* (A_1,B_1), (A_2,B_2) *et ayant même axe radical avec le cercle* S.

Voici la solution que nous proposons et dont la démonstration est évidente: *Par les points* (A_1,B_1) *faites passer un cercle arbitraire* λ_1 ; *soit* I_1 *le point de rencontre de la droite* A_1B_1 *avec l'axe radical des cercles* S_1 *et* λ_1; *de même par les points* (A_2,B_2) *faites passer un second cercle quelconque* λ_2, *et soit* I_2 *le point de rencontre de la droite* A_2B_2 *avec l'axe radical des cercles* S *et* λ_2; *la droite* I_1I_2 *rencontre le cercle* S *aux deux points cherchés.*

Problème II. — *Étant donné sur une sphère un cercle* S, *déterminer deux cercles de cette sphère passant respectivement par deux couples de points donnés* (A_1,B_1), (A_2,B_2) *et coupant le cercle* S *aux deux mêmes points?*

De la solution du problème précédent résulte immédiatement la suivante pour ce second problème :

Prenez un point arbitraire P *sur la sphère, et par les points* (A_1, B_1) *tracez sur cette surface un cercle arbitraire* λ_1; *soit* I_1 *le point de rencontre du cercle* PA_1B_1 *avec le cercle qui passe par* P *et par les deux points d'intersection des deux cercles* S *et* λ_1; *de même par les points* (A_2, B_2) *tracez sur la sphère un second cercle arbitraire* λ_2; *soit* I_2 *le point de rencontre du cercle* PA_2B_2 *avec le cercle qui passe par* P *et par les deux points d'intersection des deux cercles* S *et* λ_2; *le cercle* PI_1I_2 *rencontre le cercle* S *aux deux points demandés.*

Problème III. — *Étant donnés trois cercles arbitraires dans l'espace* λ, C_1, C_2, *trouver deux sphères qui passent respectivement par les deux derniers et qui coupent le premier aux deux mêmes points.*

Si l'on considère les points d'intersection (A_1, B_1), (A_2, B_2) des cercles C_1, C_2 avec le plan du cercle λ, la question est évidemment ramenée à celle du premier problème.

THÉORÈMES SUR LES CYCLIQUES PLANES (*).

Théorème I. — *Soient* C_1, C_2 *deux points d'une cyclique plane* Σ, *et* (P, Q), (A_1, A_2) *les points d'intersection de cette courbe et de deux cercles passant par* (C_1, C_2); *si l'on considère la série des cercles passant par* (A_1, A_2) *et coupant* Σ *suivant des couples de points* (M_1, N_1), (M_2, N_2), (M_3, N_3) ,..., *les cercles* (PM_1N_1), (PM_2N_2), (PM_3N_3),..., *contenant tous le point* P, *passent aussi par le point* Q.

Théorème II. — *Soient* (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) *trois couples de points arbitraires pris dans un même plan ; si, par les deux premiers points* (A_1, B_1), *on mène un cercle quelconque* λ, *et que l'on considère les deux cercles passant respectivement par les points* (A_2, B_2), (A_3, B_3) *et coupant le cercle* λ *aux deux points* α_1, α_2, *ces derniers points décrivent une cyclique du* 4ème *ordre contenant les six points* (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3).

Théorème III. — *Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie; mais on peut, étant donnée une cyclique quelconque* Σ, *trouver une infinité de systèmes de points* (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) *qui peuvent servir à sa génération.*

Voici un moyen de déterminer ces systèmes de points :

Soient P,Q *deux points arbitraires de la cyclique, et* (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) *les trois couples de points d'intersection de cette même cyclique et de trois cercles quelconques passant par* P,Q ; *ces trois couples de points répondent à la question.*

Remarque. — Parmi les nombreux corollaires que l'on peut déduire de cet important théorème, nous ne citerons que les suivants :

(*) Courbes du 4e ordre ayant pour points doubles les points circulaires à l'infini.

1° *Détermination de la tangente en un point quelconque.* — Il est manifeste que si l'on sait déterminer la tangente au point A_1, on saura la déterminer par là même en un point quelconque. Cette dernière détermination résulte immédiatement de la génération que nous venons d'indiquer et l'on est conduit à cette règle :

Soit A'_1 *le second point de rencontre des cercles* $(A_1A_2B_2)$, $(A_1A_3B_3)$; *la tangente au point* A_1 *au cercle* $(A_1B_1A'_1)$ *est la tangente demandée.*

2° *Détermination du cercle osculateur en un point quelconque.* — Si l'on suppose les deux points (A_1,B_1) réunis au point A dans la direction AT, on obtient le cercle osculateur en ce point en procédant comme il suit :

Soit A′ *le second point d'intersection des cercles* (AA_2B_2), (AA_3B_3), *le cercle qui est tangent en* A *à la droite* AT *et qui passe par le point* A′ *est le cercle osculateur cherché.*

THÉORÈMES SUR LES CYCLIQUES SPHÉRIQUES (*).

THÉORÈME I. — *Soient* C_1,C_2 *deux points d'une cyclique sphérique* Σ, *et* (P,Q), (A_1,A_2) *les points d'intersection de cette courbe et de deux cercles passant par* (C_1,C_2) ; *si l'on considère la série des cercles passant par* (A_1,A_2) *et coupant* Σ *suivant des couples de points* (M_1,N_1), (M_2,N_2), (M_3,N_3),..., *les cercles* (PM_1N_1), (PM_2N_2), (PM_3N_3),..., *contenant tous le point* P, *passent aussi par le point* Q.

THÉORÈME II. — *Soient* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3) *trois couples de points arbitraires pris sur une même sphère ; si, par les deux premiers points* (A_1,B_1), *on mène un cercle quelconque* λ *situé sur la sphère et que l'on considère les deux cercles passant respectivement par les points* (A_2,B_2), (A_3,B_3) *et coupant le cercle* λ *aux deux mêmes points* α_1, α_2, *ces derniers points décriront une cyclique sphérique du* 4ème *ordre contenant les six points* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3).

THÉORÈME III. — *Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie ; mais on peut, étant donné une cyclique sphérique quelconque* Σ, *trouver une infinité de systèmes de points* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3), *qui peuvent servir à sa génération.*

Voici un moyen de déterminer ces systèmes de points :

Soient P, Q *deux points arbitraires de la cyclique, et* (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3) *les trois couples de points d'intersection de cette même cyclique et de trois cercles quelconques de la sphère passant par* (P,Q) ; *ces trois couples de points répondent à la question.*

Parmi les corollaires que l'on peut déduire de ce théorème, nous ne citerons que les suivants :

1° *Détermination de la tangente en un point quelconque.* — Il suffit évidemment de savoir la déterminer au point A_1. Pour cela, on suivra la règle suivante :

(*) Courbes résultant de l'intersection d'une surface du second ordre et d'une sphère.

Soit A'_1 *le second point de rencontre des cercles* $(A_1A_2B_2)$, $(A_1A_3B_3)$; *la tangente au point* A_1 *au cercle* $(A_1B_1A'_1)$ *est la tangente demandée.*

M. Darboux, dans son ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 56 et 77, donne deux solutions différentes de ce même problème.

2° *Détermination du cercle osculateur en un point quelconque.* — Si l'on suppose les deux points A_1,B_1 réunis au point A dans la direction AT, on obtient le cercle osculateur en procédant comme il suit :

Soit A' *le second point d'intersection des cercles* (AA_2B_2), (AA_3B_3), *le cercle qui est tangent en* A *à la droite* AT *et qui passe par le point* A' *est le cercle osculateur cherché* (*).

THÉORÈMES SUR LES CYCLIDES DU 4ème ORDRE (**).

THÉORÈME I. — *Soit* C *un cercle de la cyclide* Σ *et* C_1,C_2 *deux cercles d'intersection de cette surface et de deux sphères passant par le* 1er *cercle* C ; *si l'on considère la série des sphères passant par* C_2 *et coupant* Σ *suivant des cercles* $E_1,E_2,E_3,\ldots$, *les sphères* (PE_1), (PE_2), $(PE_3),\ldots$, *contenant un même point* P *du cercle* C_1, *le contiennent en entier.*

THÉORÈME II. — *Soient* C_1,C_2 *deux cercles arbitraires pris dans l'espace ; si, par deux points* P_1,P_2 *également arbitraires, on mène un cercle* λ *dont le plan et le rayon sont arbitraires, et que l'on considère les deux sphères passant respectivement par les cercles* C_1,C_2 *et coupant le cercle* λ *aux deux mêmes points* α_1,α_2, *ces derniers points décrivent une cyclide du* 4ème *ordre contenant les points* P_1,P_2 *et les deux cercles* C_1,C_2.

THÉORÈME III. — *Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie; mais on peut, étant donnée une cyclide quelconque* Σ, *trouver une infinité de systèmes de points* P_1,P_2 *et de cercles* C_1,C_2 *qui peuvent servir à sa génération.*

Voici un moyen de les déterminer :

Soit C *un cercle arbitraire de la cyclide et* C',C_1,C_2 *les trois cercles d'intersection de cette surface et de trois sphères quelconques passant par* C; *deux points arbitraires* P_1,P_2 *pris sur la circonférence* C' *et les deux cercles* C_1,C_2 *répondent à la question.*

Parmi les corollaires de cet important théorème, bornons-nous à remarquer, pour le moment, qu'il enseigne à déterminer le plan tangent en un point quelconque de la surface, au point P_1 par exemple. Il suffit, en effet, de mener en ce point les tangentes aux deux courbes planes que décrivent les points α_1,α_2 pour deux positions différentes du plan du cercle λ, problème que nous avons déjà appris à résoudre.

(*) M. Laguerre a déjà proposé, t. I, p. 101 du *Bulletin* de la Société, une autre solution.
(**) Surfaces du 4e ordre ayant le cercle de l'infini par ligne double.

Seconde note sur la génération des cycliques; par M. L. SALTEL.

(Séance du 14 avril 1875)

Dans une précédente communication, j'ai montré avec quelle facilité on peut décrire par points une cyclique Σ plane ou sphérique, lorsqu'on connait l'un des systèmes de trois couples de points désignés par les lettres (A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3), système de points que nous appellerons *associés*. L'objet de la note actuelle a pour but d'enseigner à déterminer, par la règle et le compas, l'un des systèmes de points, lorsqu'on définit la courbe par huit points $A_1,B_1,1,2,3,4,5,6$.

LEMME I. — Décrire une cyclique Σ dans le cas particulier où les huit points $A_1,B_1,1,2,3,4,5,6$ sont tels que les points $(A_1,B_1,1,2,)$ sont sur un même cercle, ainsi que les points $(A_1,B_1,3,4)$.

Soient $5'$ le second point de rencontre des cercles $(1,2,5)$, $(3,4,5)$, et de même $6'$ le second point de rencontre des cercles $(1,2,6)$, $(3,4,6)$; les couples de points

$$(A_1, B_1),\ (5, 5'),\ (6, 6')$$

constituent un système de points *associés*.

LEMME II. — Décrire une cyclique passant par les sept points arbitraires $A_1,B_1,1,2,3,4,5$.

Soient $3'$ le second point d'intersection des cercles $(A_1,B_1,3)$, $(1,2,3)$, et de même $4'$ le second point d'intersection des cercles $(A_1,B_1,4)$, $(1,2,4)$; soit en outre $5'$ le second point d'intersection des cercles $(3,3',5)$, $(4,4',5)$, les points

$$(A_1, B_1),\ (1, 2),\ (5, 5')$$

constituent un système de points *associés* à une cyclique Σ'_1, passant par les sept points donnés, c'est-à-dire que l'on obtiendra les deux nouveaux points communs à cette courbe et à un cercle quelconque C_1 passant par (A_1,B_1), en construisant, ce que nous avons appris à faire, les deux cercles passant respectivement par les points $(1,2)$, $(5,5')$ et par les deux mêmes points du cercle C_1; désignons par μ_1,γ_1 les deux points ainsi obtenus.

REMARQUE I. — En faisant jouer à deux des points $(1,2,3,4,5)$, à l'exception de $(1,2)$, le même rôle que ces deux derniers viennent de jouer dans la construction de la courbe Σ'_1, on obtiendrait une nouvelle courbe Σ'_2 passant par les sept points donnés et qui couperait le cercle C_1 en deux points μ_2,γ_2, faciles à déterminer. Désignons par V le point de rencontre des droites $\mu_1\gamma_1$, $\mu_2\gamma_2$.

REMARQUE II. — Il est évident que *toutes* les cycliques passant par les sept points donnés $A_1,B_1,1,2,3,4,5$ rencontrent le cercle C_1 en deux points, en ligne droite avec le point V.

REMARQUE III. — En suivant la même marche pour les sept points A_1,B,1,2,3,4,6, on obtiendrait, relativement au cercle C_1, un second point V′ en ligne droite avec les deux points d'intersection de ce cercle et de toutes les cycliques passant par ces sept points.

COROLLAIRE I. — Il est manifeste que la ligne droite VV′ rencontre le cercle C_1 aux deux mêmes points que la cyclique *cherchée*, c'est-à-dire la cyclique passant par les huit points A_1,B_1,1,2,3,4,5,6.

COROLLAIRE II. — Le cercle C_1 passant par les deux points A_1,B_1, on peut dire que nous venons de résoudre ce problème :

Une cyclique étant définie par huit points, trouver les deux nouveaux points d'intersection de cette courbe et d'un cercle quelconque passant par deux de ces huit points.

COROLLAIRE III. — En cherchant les nouvelles intersections (α_1,α_2), (β_1,β_2), de la cyclique définie par les huit points A_1,A_2,1,2,3,4,5,6, avec deux cercles C_1,C_2, passant par A_1,A_2, et prenant deux des six points 1,2,3,4,5,6, les points 1,2, par exemple, on aura huit nouveaux points A_1,A_2,α_1,α_2,β_1,β_2,1,2, définissant la courbe, et qui seront dans les mêmes conditions que les huit points du lemme I.

COROLLAIRE IV. — *Une cyclique étant définie par huit points* A_1,B_1,1,2,3,4,5,6, *on peut toujours trouver un système de trois couples de points associés, parmi lesquels peuvent figurer deux des points donnés.*

C'est là le problème que nous nous étions proposé.