BULLETIN DE LA S. M. F.

G. DARBOUX

Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 100-113

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__100_0>

Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution; par M. G. Darboux.

(Séance du 21 mars 1877.)

I.

Dans un article inséré aux *Comptes rendus*, t. LXXVII, p. 849, M. Bertrand s'est proposé de rechercher, parmi toutes les lois d'attraction émanant d'un centre fixe, celles pour lesquelles la trajectoire d'un point libre sera toujours fermée. Je me propose d'étendre la même recherche au mouvement d'un point sur une surface de révolution, en admettant que le point est soumis à la seule action de forces émanant de différents points de l'axe ou bien de forces parallèles à l'axe et fonctions de la distance du point sur lequel elles agissent à un plan fixe parallèle à l'axe. Ces hypothèses se résument en une seule : il y a une fonction des forces qui conserve la même valeur en tous les points d'un parallèle de la surface.

Prenons pour l'axe des z l'axe de la surface. Désignons par r la distance d'un point quelconque à cet axe, et soit

$$z = \varphi(r)$$

l'équation de la surface. La fonction des forces sera, par hypothèse, une fonction de r, que je désignerai par

$$f(r).$$

En désignant par ω l'angle que fait le plan méridien contenant le mobile avec un méridien fixe, l'équation différentielle de la trajectoire sera, comme on sait,

$$(1) \qquad \frac{(1+\varphi'^2)\,dr^2}{r^4\,d\omega^2} = C^2 f(r) + h - \frac{1}{r^2},$$

C^2 et h désignant deux constantes arbitraires.

Si la courbe est fermée, les valeurs de r seront comprises entre deux limites a, b, et la trajectoire sera comprise tout entière entre les deux parallèles de rayons a et b. Pour ces deux parallèles extrêmes, $\frac{dr}{d\omega}$ doit s'annuler, r étant maximum ou minimum. On a donc

$$C^2 f(a) + h - \frac{1}{a^2} = 0,$$

$$C^2 f(b) + h - \frac{1}{b^2} = 0.$$

Ces équations nous permettent d'exprimer C^2 et h en fonction de a et de b. Si l'on pose

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} f(r) & 1 & \frac{1}{r^2} \\ f(a) & 1 & \frac{1}{a^2} \\ f(b) & 1 & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix},$$

l'équation de la trajectoire devient ainsi

$$(1 + \varphi'^2) \frac{dr^2}{r^4 d\omega^2} = \frac{\Delta}{f(b) - f(a)},$$

et l'on a par conséquent

$$\omega = \int \frac{dr\sqrt{1 + \varphi'^2}\sqrt{f(b) - f(a)}}{r^2\sqrt{\Delta}}.$$

En employant le mode de raisonnement proposé par M. Bertrand, on reconnaît qu'il est nécessaire et suffisant, pour que la courbe soit fermée, que l'on ait

$$3) \qquad \int_a^b \frac{\sqrt{1 + \varphi'^2}\sqrt{f(b) - f(a)}}{r^2\sqrt{\Delta}} dr = \mu\pi,$$

μ étant un nombre commensurable constant. Ainsi il y a à déterminer les deux fonctions arbitraires $f(r)$, $\varphi(r)$, de manière à satisfaire à l'égalité précédente. Dans le problème traité par M. Bertrand, il y avait, au contraire, une seule fonction inconnue.

Je commencerai par réserver le cas où l'on suppose la fonction $f(r)$ co stante, ce qui revient à chercher les surfaces de révolution pour l squelles les lignes géodésiques sont fermées. Alors on pourra effectuer le changement de notations suivant.

Posons

(4) $f(r)=x,\quad f(a)=\alpha,\quad f(b)=\beta,\quad \frac{1}{r^2}=\varpi(x),\quad \frac{1+\varphi'^2}{\varphi'^2 r^4}=\mathrm{F}(x).$

L'équation (3) se transformera dans la suivante :

$$\Omega=\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\mathrm{F}(x)}\sqrt{\beta-\alpha}\,dx}{\sqrt{\begin{vmatrix} x & 1 & \varpi(x) \\ \alpha & 1 & \varpi(\alpha) \\ \beta & 1 & \varpi(\beta)\end{vmatrix}}}=\mu\pi. \tag{5}$$

Posons $\beta=\alpha+\varepsilon$, $x=\alpha+\varepsilon u$, et supposons ε suffisamment petit. Nous allons chercher les trois premiers termes du développement de l'intégrale précédente suivant les puissances de ε.

On a

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & 1 & \varpi(x) \\ \alpha & 1 & \varpi(\alpha) \\ \beta & 1 & \varpi(\beta)\end{vmatrix}$$
$$=\frac{u(1-u)}{2}\varepsilon^3\left[\varpi''+\frac{\varpi'''}{3}(\varepsilon+\varepsilon u)+\frac{\varepsilon^2\varpi^{\text{IV}}}{12}(1+u+u^2)+\ldots\right],$$

ϖ'', ϖ''', ϖ^{IV} désignant les dérivées de ϖ pour $x=\alpha$. Par suite

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{u(1-u)}{2}\varpi''\varepsilon^3}}\Bigg[1-\frac{1}{6}\frac{\varpi'''}{\varpi''}\varepsilon(1+u)-\frac{\varpi^{\text{IV}}}{24\varpi''}\varepsilon^2(1+u+u^2) \\ +\frac{\varpi'''^2}{24\varpi''^2}\varepsilon^2(1+u)^2+\ldots\Bigg].\end{aligned}\right.$$

On a de même

$$(7)\quad \sqrt{\mathrm{F}(x)}=\sqrt{\mathrm{F}(\alpha)}\left(1+\frac{\mathrm{F}'}{2\mathrm{F}}\varepsilon u+\frac{\mathrm{F}''}{4\mathrm{F}}\varepsilon^2u^2-\frac{1}{8}\frac{\mathrm{F}'^2}{\mathrm{F}^2}\varepsilon^2u^2+\ldots\right).$$

On trouve ainsi sans peine d'abord le premier terme de Ω

$$\Omega=\sqrt{\frac{2\mathrm{F}(\alpha)}{\varpi''(\alpha)}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}+\varepsilon(\ldots)+\ldots.$$

Pour $\varepsilon=0$, Ω se réduit à son premier terme. En effectuant l'intégrale qui y est indiquée, on obtiendra l'équation

$$\pi\sqrt{\frac{2\mathrm{F}(\alpha)}{\varpi''(\alpha)}}=\mu\pi,$$

et par conséquent

(8) $$F(x) = \frac{\mu^2}{2}\varpi''(x).$$

Ainsi tout se réduit à calculer la fonction $\varpi(x)$. Pour obtenir cette fonction, nous allons compléter le développement de Ω. En mettant à la place de $F(x)$ sa valeur dans la formule (7) et substituant les développements de $F(x)$ et $\Delta^{-\frac{1}{2}}$ dans l'expression de Ω, nous obtenons le résultat suivant :

$$\Omega = \mu\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}\left[1 + \frac{\varpi'''}{6\varpi''}(2u-1)\varepsilon + \frac{\varpi^{\text{IV}}}{24\varpi''}(5u^2-u-1)\varepsilon^2 + \frac{\varpi'''^2}{24\varpi''^2}\varepsilon^2(1-4u^2)+\ldots\right].$$

Or on a

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi, \quad \int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{3}{8}\pi.$$

Substituons ces valeurs dans Ω, et nous aurons

$$\Omega = \mu\pi + \pi\varepsilon^2\left(\frac{\varpi^{\text{IV}}}{64\varpi''} - \frac{\varpi'''^2}{48\varpi''^2}\right)+\ldots;$$

Ω devant être égal à $\mu\pi$, il faut que le coefficient de toutes les puissances de ε et, en particulier, celui de ε^2, soient nuls, ce qui donne l'équation

(9) $$3\varpi''\varpi^{\text{IV}} - 4\varpi'''^2 = 0,$$

qui fera connaître ϖ.

Cette équation admet deux espèces de solutions. La première s'obtiendra en supposant $\varpi''(x)$ constant. On a ainsi

(10) $$\varpi(x) = Cx^2 + Bx + A.$$

Toutes les autres seront comprises dans la formule

(11) $$\varpi(x) = \frac{A}{x-\alpha} + Bx + C.$$

Il est aisé de voir d'ailleurs que ces deux formes sont acceptables et donnent toutes les deux, jointes à l'équation

$$(12) \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\mu^2}{2}\varpi''(x);$$

des solutions du problème posé.

Il nous reste à les discuter et à reconnaître la nature des surfaces et des forces auxquelles elles correspondent. Rappelons d'abord les notations primitives.

Nous avons posé

$$(13) \qquad f(r) = x;$$

x est donc la fonction des forces, et l'on pourra sans inconvénient lui ajouter ou lui retrancher une constante.

Nous avons d'ailleurs

$$(14) \qquad \frac{1}{r^2} = \varpi(x),$$

et, en résolvant cette équation par rapport à x, nous aurons la fonction des forces exprimée en r. Enfin, d'après la définition de $\mathrm{F}(x)$, nous pouvons écrire

$$(15) \qquad \frac{1+\varphi'^2}{f'^2(r)\,r^4} = \mathrm{F}(x) = \frac{\mu^2}{2}\varpi''(x).$$

Les équations (13), (14), (15) nous feront connaître $f(r)$, $\varphi(r)$, et, par conséquent, à la fois la nature de la surface et celle des forces.

II.

Appliquons d'abord ces formules à la première hypothèse, celle pour laquelle on a

$$\varpi(x) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}.$$

En augmentant la fonction des forces x d'une constante arbitraire et remarquant que A ne peut être nulle [sans quoi $\mathrm{F}(x)$ serait nulle], on peut écrire

$$\varpi(x) = \frac{1}{r^2} = \frac{x^2}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}},$$

ou

$$(16) \qquad x^2 = \frac{\mathrm{A}}{r^2} - \mathrm{C}.$$

De l'équation (15) on tire

$$(17) \qquad 1+\varphi'^2 = \frac{A\mu^2 r^2}{A - Cr^2}.$$

Commençons par supposer $\mu = 1$, nous aurons

$$\varphi' = \sqrt{\frac{C}{A - Cr^2}}\, r$$

et, en intégrant,

$$\varphi^2 + r^2 = \frac{A}{C},$$

c'est-à-dire

$$z^2 + r^2 = \frac{A}{C}.$$

La surface est donc une sphère.

Quant à la force, on peut en donner différentes expressions. Voici la plus élégante. En vertu de l'équation de la surface, la fonction des forces x peut s'écrire

$$x = \sqrt{C}\,\frac{z}{r},$$

et, en différentiant cette expression, on obtiendra les deux composantes R, Z de la force, l'une perpendiculaire à l'axe des z, l'autre parallèle à cet axe. On trouve

$$R = -\sqrt{C}\,\frac{z}{r^2}, \quad Z = \frac{\sqrt{C}}{r}, \quad \sqrt{Z^2 + R^2} = \frac{\sqrt{C}}{r^2}.$$

Ces expressions nous montrent : 1° que la force est tangente au méridien; 2° qu'elle est en raison inverse du carré de r, c'est-à-dire du carré du sinus de l'arc de cercle θ compris entre le point attiré et le pôle.

On sait en effet qu'avec cette nature de forces la trajectoire sera une conique sphérique dont le pôle sera un des foyers.

Supposons maintenant que μ ne soit plus égal à l'unité; alors la formule (17) nous montre que, pour la surface de révolution cherchée, on aura

$$ds^2 = \frac{\mu^2 A r^2 dr^2}{A + Cr^2} + r^2 d\omega^2.$$

Or, si l'on pose

$$\omega = \mu\omega',$$

on a

$$ds^2 = \mu^2\left(\frac{A r^2 dr^2}{A + C r^2} + r^2 d\omega'^2\right),$$

expression qui ne diffère de celle qui est relative au cas de $\mu = 1$ que par la présence d'un facteur constant μ. L'hypothèse actuelle conduit donc simplement à des surfaces de révolution applicables sur la sphère.

Ce résultat pouvait se prévoir *a priori*, car on sait que les équations du mouvement d'un point sur une surface demeurent les mêmes quand on déforme la surface en conservant à la fonction des forces la même expression en fonction des coordonnées curvilignes d'un point sur la surface.

Ainsi le cas où μ est quelconque ne donne rien d'essentiellement nouveau.

L'analyse précédente exclut le cas où $C = 0$. Examinons cette hypothèse.

On a alors

$$x = \frac{a}{r}, \quad 1 + \varphi'^2 = \mu^2.$$

Supposons d'abord $\mu = 1$, on a

$$\varphi' = 0, \quad z = \text{const}.$$

C'est le cas où le mouvement a lieu dans un plan et où la force est en raison inverse du carré de la distance à un point fixe et dirigée vers ce point.

Si μ est quelconque, on a

$$z = \sqrt{\mu^2 - 1}\, r,$$

équation qui convient à un cône de révolution, la force étant une attraction dirigée vers le sommet du cône et en raison inverse du carré de la distance.

III.

Examinons maintenant la seconde hypothèse, celle pour laquelle on a

$$\varpi(x) = \frac{A}{x-\alpha} + Bx + C,$$

expression qu'en changeant x en $x+\alpha$ on peut toujours ramener à la forme

$$\varpi(x) = \frac{A}{x} + Bx + C.$$

On aura ici

$$(18) \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{A}{x} + Bx + C,$$

et, pour n'avoir pas à tirer x de cette équation, nous conserverons x comme variable indépendante. Nous trouverons ainsi

$$(19) \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{4\mu^2 A(A + Bx^2 + Cx) - (A - Bx^2)^2}{4x(A + Bx^2 + Cx)^3}.$$

Il faudra effectuer la quadrature qui donne z, puis éliminer x entre l'équation obtenue et l'équation (18). Pour avoir la fonction des forces, on exprimera x en fonction de r en résolvant l'équation (18). Les résultats sont, on le voit, assez compliqués.

Traitons d'abord le cas où $B = 0$, et prenons $2\mu = 1$. Nous savons que toute autre hypothèse sur μ nous conduirait à des surfaces applicables sur celle que nous allons trouver. Nous pouvons donc nous borner à considérer cette valeur particulière de μ.

On a alors

$$z = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}\sqrt{A + Cx}}, \qquad r^2 = \frac{x}{A + Cx},$$

et, par conséquent,

$$z^2 + r^2 = \frac{1}{C}.$$

Ainsi la surface correspondant à ce cas est encore une sphère. La fonction des forces x peut s'écrire

$$x = \frac{A}{C}\frac{r^2}{z^2};$$

sous cette forme, elle donne naissance aux deux composantes

$$R = \frac{A}{C}\frac{2r}{z^2}, \quad Z = -\frac{A}{C}\frac{2r^2}{z^3}.$$

On voit que la force est encore dirigée suivant la tangente au méridien. Quant à sa grandeur, elle est

$$\sqrt{R^2 + Z^2} = \frac{2A}{C\sqrt{C}}\frac{r}{z^3} = \frac{2A}{C}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta},$$

θ désignant la distance au pôle, du point considéré.

On trouve, en effet, dans cette hypothèse, comme trajectoire, une conique sphérique ayant le pôle pour centre.

Si B et C sont nuls en même temps, on a

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{(4\mu^2 - 1)}{4Ax}$$

et, en prenant $2\mu = 1$,

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad z = \text{const.};$$

on obtient ainsi un plan. La fonction des forces est alors

$$x = Ar^2:$$

c'est le cas où il y a une attraction proportionnelle à la distance.

Si μ était quelconque, on obtiendrait un cône de révolution, et la force serait une attraction émanant du sommet et proportionnelle à la distance.

Les autres suppositions sur A, B, C conduisent à des résultats compliqués; je ne les examinerai pas.

IV.

Dans ce qui précède, nous avons pris d'abord le rayon r du parallèle comme une variable arbitraire. Mais il n'arrive pas toujours que, sur une surface de révolution, cette variable puisse prendre toutes les valeurs possibles. Par exemple, dans la sphère, le rayon du parallèle doit être inférieur à celui de la sphère; par conséquent, si la trajectoire du mobile est située dans les deux hémisphères,

r pourra croître d'une limite inférieure a à R, puis décroître de R à une autre limite. Or les intégrations que nous avons faites pour obtenir Ω supposent que r soit réellement in dépendante et ne s'appliquent pas à cette hypothèse. La méthode que nous avons suivie est donc sujette à une objection qu'il est d'ailleurs facile de lever.

En effet, si la courbe est fermée, comme nous le supposons, on pourra toujours déterminer les constantes C et h qui figurent dans l'équation (1), de telle manière que $\frac{dr}{d\omega}$ s'annule pour deux valeurs a et b aussi rapprochées qu'on le voudra et que *la courbe soit, par conséquent, comprise entre deux parallèles ne comprenant pas un équateur ou parallèle de rayon maximum;* alors notre méthode deviendra applicable et nous voyons qu'elle nous donne bien toutes les surfaces et toutes les lois de la force pour lesquelles la trajectoire sera toujours fermée. Mais nous allons voir que cet examen des parallèles de rayon maximum joue un rôle prépondérant dans la discussion de ce cas particulier de notre problème que nous avons réservé, celui où l'on cherche les surfaces de révolution dont toutes les lignes géodésiques sont fermées.

En effet, considérons une surface de révolution et une ligne géodésique quelconque tracée sur cette surface. Si i désigne l'angle que fait la ligne géodésique en un point quelconque avec le parallèle qui passe en ce point, l'équation différentielle de la ligne géodésique sera

$$r \cos i = a.$$

Partons du parallèle de rayon a. La ligne géodésique lui est tangente et elle se dirige du côté où le rayon du parallèle augmente. Si ce rayon croît toujours, la ligne géodésique s'éloignera indéfiniment en coupant les parallèles sous un angle qui s'approchera de plus en plus d'être droit. S'il n'y a pas de parallèle de rayon égal à a, on partira d'un parallèle quelconque et l'on obtiendra les mêmes conclusions.

Supposons, au contraire, qu'il y ait un parallèle de rayon maximum que j'appellerai *un équateur* de rayon R. Si je prends a un peu inférieur à R, il y aura deux parallèles de rayon a voisins l'un de l'autre, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de l'équateur, et une ligne géodésique définie par l'équation

$$r \cos i = a,$$

comprise entre ces deux parallèles et tout entière à distance finie. Je vais chercher la condition pour qu'une telle ligne soit toujours fermée.

Reprenons l'équation différentielle (1) où nous supposerons nulle la fonction des forces

$$(20) \qquad \frac{(1+\varphi'^2)\,dr^2}{r^4\,d\omega^2} = h - \frac{1}{r^2},$$

et qui conviendra alors à une ligne géodésique; $\frac{dr}{d\omega}$ s'annulant pour $r = a$, on aura

$$h = \frac{1}{a^2},$$

et l'équation de la surface sera, nous l'avons vu,

$$(21) \qquad z = \varphi(r).$$

On déduit de l'équation (20)

$$\omega = \int_a^r \frac{\sqrt{1+\varphi'^2}\,dr}{r^2\sqrt{h - \frac{1}{r^2}}},$$

et si nous désignons par ω_1 l'angle dont le plan méridien passant par le point décrivant aura tourné quand on arrivera sur l'équateur, on aura

$$(22) \qquad \omega_1 = \int_a^R \frac{\sqrt{1+\varphi'^2}\,dr}{r^2\sqrt{h - \frac{1}{r^2}}}.$$

Le point, après avoir décrit cette portion de la ligne géodésique que nous supposerons placée dans la région inférieure à l'équateur, passera dans la région opposée, et si

$$(23) \qquad z = \psi(r)$$

est l'équation de cette nouvelle région de la surface, l'angle ω_2 dont le plan méridien aura tourné quand le point décrivant arrivera au parallèle supérieur de rayon a sera donné par la formule

$$(24)\qquad \omega_2 = \int_a^R \frac{\sqrt{1+\psi'^2}\,dr}{r^2\sqrt{h-\frac{1}{r^2}}}.$$

L'angle total dont le plan méridien aura tourné quand on passera du parallèle inférieur de rayon a au parallèle supérieur de même rayon sera donc

$$(25)\qquad \Omega = \omega_1 + \omega_2 = \int_a^R \frac{\sqrt{1+\varphi'^2}+\sqrt{1+\psi'^2}}{r\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}}}\,dr,$$

et, pour que la ligne géodésique soit fermée, il faudra que l'on ait

$$\Omega = 2\mu\pi,$$

μ étant un nombre commensurable constant. Ainsi l'intégrale Ω doit être constante.

Il suffit d'un peu d'attention pour reconnaître que cette intégrale est, aux notations près, celle qu'on rencontre dans la recherche des courbes tautochrones pour un point matériel pesant et l'on est ainsi conduit à la solution du problème donnée par la formule

$$(26)\qquad \sqrt{1+\varphi'^2}+\sqrt{1+\psi'^2} = \frac{4\mu R}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

On voit que l'on pourra choisir arbitrairement l'une des fonctions φ ou ψ; l'autre sera déterminée par une quadrature.

Traitons le cas où la surface est symétrique par rapport à l'équateur. On aura alors

$$\varphi'^2 = \psi'^2,$$

et l'équation précédente deviendra

$$(27)\qquad \sqrt{1+\varphi'^2} = \frac{2\mu R}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

Étudions d'abord le cas où l'on a

$$2\mu = 1,$$

on trouve alors

$$d\varphi = \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = dz$$

et, en intégrant,

$$z^2 + r^2 = R^2.$$

C'est l'équation de la sphère.

On peut rattacher à cette solution celles pour lesquelles μ est un nombre commensurable quelconque.

En effet, il résulte de la formule (26) que la distance de deux points infiniment voisins sur la surface est donnée par la formule

$$ds^2 = \frac{4\mu^2 R^2 dr^2}{R^2 - r^2} + r^2 d\omega^2.$$

Si l'on remplace ω par $2\mu\omega'$, on a

$$ds^2 = 4\mu^2\left(\frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2} + r^2 d\omega'^2\right),$$

et l'on voit que la surface est applicable sur une sphère de rayon $2\mu R$.

On peut même donner les formules qui établissent la correspondance entre les points des deux surfaces. En posant

$$(28) \qquad 2\mu r = r', \quad 2\mu R = R',$$

l'équation précédente devient

$$ds^2 = \frac{R'^2 dr'^2}{R'^2 - r'^2} + r'^2 d\omega'^2,$$

et elle convient à une sphère de rayon R' pour laquelle r', ω' seraient les coordonnées polaires d'un point quelconque.

On a, entre les coordonnées des points correspondants des deux surfaces, les relations

$$2\mu r = r',$$
$$\omega = 2\mu\omega',$$

μ étant commensurable; posons $2\mu = \frac{p}{q}$, on aura

$$q\omega = p\omega'.$$

On voit donc que, pour établir d'une manière complète la correspondance entre les deux surfaces, il faudra considérer la sphère comme composée de q feuillets superposés et la surface comme composée de même de p feuillets.

Nous avons donc le théorème suivant :

Les seules surfaces de révolution ayant leurs lignes géodésiques fermées et admettant un de leurs parallèles pour plan de symétrie sont la sphère et les surfaces applicables sur une sphère, de telle manière que le rapport de leur aire à celle de la sphère de même courbure soit un nombre commensurable.

On sait que, parmi les surfaces de révolution applicables sur la sphère, les unes ne rencontrent pas leur axe, les autres ont un point saillant sur cet axe. Pour les premières, il y aura des lignes géodésiques non fermées, toutes celles qui couperont sous un angle fini le parallèle minimum; pour les autres, toutes les lignes géodésiques seront fermées.