BULLETIN DE LA S. M. F.

D. ANDRÉ

Sur un problème d'analyse combinatoire

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 150-158
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__150_1>

Sur un problème d'analyse combinatoire;

par M. Désiré André.

(Séance du 30 mai 1877.)

§ I. — Problème général.

1. Considérons n lettres distinctes, susceptibles d'être répétées; assujettissons-nous à les traiter toutes de la même façon, et formons avec elles tous les groupes possibles, de p lettres chacun, satisfaisant à des conditions données. Si p n'est point inférieur à n, il se pourra, en général, que les n lettres considérées soient contenues toutes à la fois dans certains groupes. Nous supposons connue l'expression du nombre total $G_{n,p}$ des groupes formés, et nous nous proposons de déterminer celle du nombre $g_{n,p}$ des groupes renfermant chacun les n lettres considérées.

2. Évidemment, les groupes formés peuvent se classer ainsi : ceux qui contiennent chacun les n lettres données, ceux qui n'en contiennent que $n - 1$, ceux qui n'en contiennent que $n - 2$, etc., etc. Le nombre des groupes ne renfermant chacun que $n - t$ lettres

distinctes est égal au produit du facteur $g_{n-t,p}$ déjà défini par le facteur $\frac{n!}{t!(n-t)!}$, qui représente, comme on le sait, la quotité des combinaisons simples de n lettres, soit t à t, soit $n-t$ à $n-t$. Nous pouvons donc écrire identiquement, en regardant o! comme égal à l'unité,

$$G_{n,p} = \sum_{0}^{n-1} {}_t \frac{n!}{t!(n-t)!} g_{n-t,p},$$

et cette identité exprime simplement ce fait évident que le nombre total des groupes formés est la somme des nombres de groupes répondant aux différents cas de notre classification.

3. Cette relation nous montre que, si les nombres G sont connus, les nombres $g_{1,p}$, $g_{2,p}$, $g_{3,p}$, ... sont les termes d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes. Nous avons fait récemment connaître [1] le terme général d'une série ainsi déterminée. En nous reportant à l'expression que nous en avons donnée, nous trouvons

$$g_{n,p} = \sum_{1}^{n} {}_r \Psi(n, r) G_{r,p},$$

$\Psi(n, r)$ étant égal à l'expression

$$\sum (-1)^s \frac{n_1!}{k_1!(n_1-k_1)!} \frac{n_2!}{k_2!(n_2-k_2)!} \frac{n_3!}{k_3!(n_3-k_3)!} \cdots \frac{n_s!}{k_s!(n_s-k_s)!},$$

dans laquelle la caractéristique Σ s'étend à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_s, k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s$ qui dépassent zéro et satisfont, quel que soit l'indice u, aux conditions

$$k_1 + k_2 + k_3 + \qquad = n - r,$$
$$n_1 = k_1 + r,$$
$$n_u = k_u + n_{u-1}.$$

4. Si l'on tient compte de ces trois conditions, l'expression de

---

[1] Thèses soutenues devant la Faculté des Sciences de Paris, le 28 mars 1877.

$\Psi(n, r)$ se simplifie beaucoup, et l'on trouve

$$\Psi(n, r) = \frac{n!}{r!} \sum \frac{(-1)^s}{k_1! k_2! k_3! \ldots k_s!},$$

la caractéristique Σ s'étendant toujours aux mêmes systèmes de valeurs des entiers $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s$.

5. Cela étant, considérons à part l'équation

$$\varphi(\nu) = \sum \frac{(-1)^s}{k_1! k_2! k_3! \ldots k_s!},$$

et supposons que le Σ s'y étende à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_s$ qui dépassent zéro et satisfont à la condition

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s = \nu.$$

On peut voir très-facilement que, si nous convenons que $\varphi(0)$ soit égal à l'unité, nous avons, quel que soit l'entier positif ν,

$$\varphi(\nu) + \frac{1}{1!}\varphi(\nu - 1) + \frac{1}{2!}\varphi(\nu - 2) + \ldots + \frac{1}{\nu!}\varphi(0) = 0.$$

Or cette équation, et toutes celles qui n'en diffèrent que par la valeur de ν, sont évidemment satisfaites si l'on y remplace $\varphi(\nu)$ par $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$. Donc cette dernière expression est la valeur même de $\varphi(\nu)$.

6. Il s'ensuit immédiatement

$$\Psi(n, r) = \frac{n!}{r!} \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!};$$

par suite

$$g_{n,p} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \frac{n!}{r!(n-r)!} G_{n-r,p},$$

ou bien

$$g_{n,p} = \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} G_{n-t,p};$$

et telle est la solution de notre problème.

§ II. — Applications immédiates.

7. Dans ce qui précède, nous avons laissé tout à fait quelconque la loi de formation des groupes considérés. Nous pouvons donc, à l'aide des résultats que nous venons d'obtenir, résoudre notre problème dans tous les cas possibles. Nous nous contenterons de considérer le cas particulier des arrangements complets et le cas particulier des combinaisons complètes.

8. Les arrangements complets, p à p, de n lettres distinctes, sont, on le sait, les groupes qu'on obtient en écrivant, de toutes les manières possibles, à la suite les unes des autres, p lettres, distinctes ou identiques, prises, quant à leur nature, parmi les n lettres données, de façon que deux quelconques des groupes obtenus diffèrent entre eux soit par les lettres qui y entrent, soit par l'ordre de succession de ces lettres.

Désignons par $B_{n,p}$ le nombre total de ces arrangement complets, et par $b_{n,p}$ le nombre de ceux d'entre eux qui renferment à la fois les n lettres distinctes données. Nous aurons, d'après la formule précédente,

$$b_{n,p} = \sum_{0}^{n-1}{}_t (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} B_{n-t,p},$$

et, comme

$$B_{n-t,p} = (n-t)^p,$$

cette égalité deviendra

$$b_{n,p} = \sum_{0}^{n-1}{}_t (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} (n-t)^p.$$

9. Avant de passer au cas des combinaisons complètes, remarquons que la dernière formule écrite ci-dessus ne présente, à son second membre, que les puissances $p^{\text{ièmes}}$ des nombres entiers 1, 2, 3, ..., n, multipliées par des coefficients indépendants de p. Il s'ensuit que les nombres

$$b_{n,n},\ b_{n,n+1},\ b_{n,n+2},\ \ldots$$

forment une série récurrente proprement dite, d'ordre n, définie par l'équation génératrice

$$(z-1)(z-2)(z-3)\ldots(z-n)=0,$$

dont les racines sont les n premiers nombres entiers.

10. Arrivons maintenant aux combinaisons complètes. Ce sont, comme on le sait, des groupes pareils aux arrangements complets, mais dont deux quelconques diffèrent entre eux autrement que par l'ordre de succession des lettres. Si nous représentons par $D_{n,p}$ le nombre total des combinaisons complètes, p à p, de n lettres distinctes, et par $d_{n,p}$ le nombre de celles d'entre elles qui contiennent à la fois les n lettres distinctes données, nous avons, d'après notre formule générale,

$$d_{n,p}=\sum_{0}^{n-1}{}_t(-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} D_{n-t,p}.$$

Or c'est un fait bien connu que

$$D_{n-t,p}=\frac{(n-t+p-1)!}{(n-t-1)!\,p!};$$

donc, en définitive,

$$d_{n,p}=\sum_{0}^{n-1}{}_t(-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!}\,\frac{(n-t+p-1)!}{(n-t-1)!\,p!}.$$

11. On pourrait encore appliquer notre formule générale à plusieurs autres cas particuliers, à celui, par exemple, des combinaisons que nous avons nommées *combinaisons régulières* ([1]). Ce serait chose très-facile, que nous négligeons à cause même de sa trop grande facilité.

([1]) *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1876).

§ III. — Autre application.

12. La résolution du problème général que nous nous sommes proposé en commençant, ainsi que celles des problèmes particuliers que nous avons traités ensuite à titre d'applications, permet de résoudre un très-grand nombre d'autres problèmes. Nous ne résoudrons que le suivant :

Parmi les arrangements complets de n lettres prises p à p, quel est le nombre de ceux qui commencent par une même lettre et qui renferment chacun les n lettres données?

13. Si nous désignons ce nombre par $x_{n,p}$, comme il est bien clair qu'il y a autant d'arrangements commençant par une certaine lettre que d'arrangements commençant par toute autre, nous avons

$$x_{n,p} = \frac{1}{n} b_{n,p},$$

c'est-à-dire

$$x_{n,p} = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_t (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} (n-t)^p.$$

C'est là une première solution du problème actuel, laquelle montre immédiatement que les nombres $x_{n,n}, x_{n,n+1}, x_{n,n+2}, \ldots$ sont les termes d'une série récurrente proprement dite, définie par l'équation génératrice

$$(z-1)(z-2)(z-3)\ldots(z-n) = 0.$$

14. Pour obtenir une seconde solution, supposons qu'on ait supprimé la première lettre dans tous les arrangements dont on cherche le nombre. Les arrangements nouveaux, fournis par cette suppression, ne sont plus que des arrangements $p-1$ à $p-1$; ils se partagent en deux classes : ceux qui renferment les n lettres distinctes et ceux qui ne renferment que les $n-1$ lettres autres que la lettre supprimée; les premiers sont au nombre de $b_{n,p-1}$, les seconds au nombre de $b_{n-1,p-1}$. On a donc

$$x_{n,p} = b_{n,p-1} + b_{n-1,p-1},$$

c'est-à-dire

$$x_{n,p} = \sum_{0}^{n-1} {}_t (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!}(n-t)^{p-1}$$
$$+ \sum_{0}^{n-2} {}_t (-1)^t \frac{(n-1)!}{t!(n-t-1)!}(n-t-1)^{p-1}.$$

15. En rapprochant les deux expressions de $x_{n,p}$ qu'on vient de trouver, on obtient la relation

$$b_{n,p} = n(b_{n,p-1} + b_{n-1,p-1}),$$

qui exprime une propriété des nombres b et qui se vérifie très-facilement dès qu'on y remplace chacun de ces nombres par son expression connue.

16. Dans le cas particulier de trois lettres distinctes, les formules précédentes nous donnent l'une et l'autre ce même résultat

$$x_{3,p} = 3^{p-1} - 2 \,.\, 2^{p-1} + 1^{p-1},$$

et les nombres

$$x_{3,3}, \quad x_{3,4}, \quad x_{3,5}, \quad \ldots$$

forment une série récurrente proprement dite, définie par l'équation génératrice

$$(z-1)(z-2)(z-3) = 0,$$

de telle sorte que nous avons, pour toute valeur de p supérieure à 5,

$$x_{3,p} = 6x_{3,p-1} - 11\, x_{3,p-2} + 6x_{3,p-3}.$$

§ IV. — Identités numériques.

17. Les résultats obtenus par nous soit dans le cas particulier des arrangements complets, soit dans celui des combinaisons complètes, conduisent facilement à deux identités numériques assez remarquables. Cette propriété de fournir naturellement des identités numériques est d'ailleurs commune à la plupart des résultats de l'analyse combinatoire.

18. Prenons la formule qui nous donne $b_{n,p}$. Évidemment, si p devient égal à n, les arrangements dont $b_{n,p}$ est le nombre ne diffèrent plus des permutations des n lettres données. Alors donc $b_{n,p}$ est égal au nombre de ces permutations, c'est-à-dire à $n!$, et nous avons l'identité

$$\sum_{0}^{n-1}{}_t(-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!}(n-t)^n = n!,$$

qui peut s'écrire

$$\sum_{0}^{n-1}{}_t(-1)^t \frac{(n-t)^n}{t!(n-t)!} = 1.$$

19. Considérons de même la formule qui donne $\partial_{n,p}$, et supposons que p y devienne égal à n. Évidemment $\partial_{n,p}$ se réduit alors à l'unité, et nous avons l'identité

$$\sum_{0}^{n-1}{}_t(-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!} \mathrm{D}_{n-t,n} = 1,$$

qui peut encore s'écrire

$$\sum_{0}^{n-1}{}_t(-1)^t \frac{(2n-t-1)!}{t!(n-t)!(n-t-1)!} = 1.$$

§ V. — Remarque générale.

20. Les raisonnements et les calculs faits par nous en commençant le présent travail montrent nettement que, si l'on considère deux suites de nombres

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \ldots,$$
$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,$$

se correspondant chacun à chacun, et tels que l'on ait, quel que soit n,

$$\Omega_n = \sum_{0}^{n-1}{}_t \frac{n!}{t!(n-t)!}\omega_{n-t},$$

on aura de même

$$\omega_n = \sum_0^{n-1}{}_t (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!}\Omega_{n-t},$$

et réciproquement.

21. Les couples de suites jouissant de ces propriétés ne sont point rares. Nous venons de trouver le couple formé par les suites des nombres G et g, le couple des suites B et b, celui des suites D et d. On en pourrait indiquer encore d'autres; nous n'en citerons qu'un, celui des deux suites que forment, d'une part, les nombres des permutations de n lettres diminués chacun d'une unité, de l'autre les nombres de celles des permutations de n lettres où aucune lettre n'est à son rang.