BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Proposition d'algèbre

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 160-163
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__160_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur une proposition d'Algèbre; par M. HALPHEN.

(Séance du 13 juin 1877.)

Si l'on désigne par les lettres f, φ, ψ trois polynômes entiers à deux variables x, y, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait identiquement

$$f = A\varphi + B\psi, \tag{1}$$

A *et* B *étant aussi des polynômes entiers en x, y?*

La réponse à cette question est des plus aisées dans le cas où chacun des systèmes de solutions des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ est *simple. Dans ce cas, il faut et il suffit que chacun de ces systèmes annule f.* J'admettrai ici ce résultat comme connu. Dans les autres cas, la question est plus difficile à résoudre. Cette difficulté a été surmontée par M. Nöther. On peut énoncer comme il suit la solution donnée par ce savant géomètre (*Math. Ann.*, t. VI) :

Soit (α, β) un système de solutions des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$; soient a, b deux développements procédant suivant les puissances entières, positives et ascendantes de $(x - \alpha)$ et $(y - \beta)$. Pour que f soit de la forme (1), il faut et il suffit qu'on puisse déterminer a et b par la condition

$$f = a\varphi + b\psi, \tag{2}$$

et qu'il en soit de même pour chaque système de solutions des équations considérées.

Cette proposition étant très-importante, je crois utile d'en donner ici une nouvelle démonstration.

Je suppose, en premier lieu, $\varphi = x$. Je groupe, dans f, ψ et B, les termes indépendants de x, et j'écris

$$f = xf' + \mathrm{F}(y), \quad \psi = x\psi' + \Psi(y), \quad \mathrm{B} = x\mathrm{B}' + \mathfrak{B}(y).$$

En faisant le même groupement dans (1), et retenant seulement les termes indépendants de x, on obtient

$$\mathrm{F}(y) = \mathfrak{B}(y)\,\Psi(y), \tag{3}$$

c'est-à-dire, *pour l'exactitude de l'équation* (1), *en supposant* $\varphi = x$, *il est nécessaire que la partie indépendante de* x *dans* f *soit divisible par la partie indépendante de* x *dans* ψ.

Cette condition est suffisante, comme on le voit immédiatement.

Soit β une racine de $\Psi(y)$. Je suppose la condition (2) remplie pour le système $(0, \beta)$. Par le même raisonnement, j'en conclus

$$\mathrm{F}(y) = b_1(y)\,\Psi(y),$$

b_1 étant une série convergente dans le voisinage de $y = \beta$. J'en conclus que F contient le facteur $(y - \beta)$ au moins à la même puissance que Ψ.

Si maintenant il en est de même pour chaque racine de Ψ, il en résulte que F est divisible par Ψ. Donc *la proposition annoncée est prouvée pour le cas où l'on a* $\varphi = x$. Au moyen d'une substitution linéaire, j'en conclus que *la proposition est prouvée aussi pour le cas où* φ *est un trinôme du premier degré en* x, y.

J'arrive maintenant au cas général. Supposons, pour un instant, les coefficients de φ variables, et faisons-les varier de telle sorte que le système de solutions (α, β) multiple d'ordre n se change en n systèmes différents (α_1, β_1), (α_2, β_2), ... Soient P_1, P_2, ... des trinômes du premier degré assujettis simplement aux conditions de s'évanouir, P_1 pour $x = \alpha_1, y = \beta_1$; P_2 pour $x = \alpha_2, y = \beta_2$, ...

En même temps, un second système de solutions (α', β') multiple d'ordre n' se change en n' systèmes différents. Soient, de même, P'_1, P'_2, ... des trinômes assujettis à des conditions analogues; et ainsi de suite.

Soient Π le produit de tous ces trinômes et φ' le polynôme φ dont on a fait varier les coefficients. Toutes les solutions communes à $\varphi' = 0$ et $\psi = 0$ étant simples, j'ai

$$\Pi = A'\varphi' + B'\psi',$$

A' et B' étant des polynômes entiers. Cette relation subsiste à la limite, lorsque $\varphi' = \varphi$. Alors P_1, P_2, ... s'évanouissent pour $x = \alpha$, $y = \beta$, et ainsi des autres.

De là cette proposition préparatoire :

Si P_1, P_2, ... *sont des trinômes du premier degré en* x, y, *assujettis simplement à s'évanouir pour* $x = \alpha$, $y = \beta$; *si* P'_1, P'_2, ... *sont, de même, des trinômes assujettis à s'évanouir pour* $x = \alpha'$, $y = \beta'$; *et de même pour chaque solution commune à* $\varphi = 0$, $\psi = 0$, *on peut choisir le nombre de ces trinômes de manière à avoir identiquement, en désignant par* Π *leur produit, et quel que soit le polynôme entier* f,

$$\Pi f = C\varphi + D\psi, \tag{4}$$

C *et* D *étant aussi des polynômes entiers.*

Je suppose maintenant la condition (2) remplie aux environs de (α, β). Il résulte alors de (4), et dans les mêmes limites,

$$(a\Pi - C)\varphi + (b\Pi - D)\psi = 0,$$

et par suite

$$C = a\Pi + c\psi, \tag{5}$$

c désignant un développement analogue à a.

Je considère séparément dans Π le facteur P_1. Les solutions communes à $P_1 = 0$ et $\psi = 0$ autres que (α, β) sont toutes simples et ne font pas évanouir φ. Elles font donc évanouir C, d'après (4). En ce qui concerne la solution (α, β), l'équation (5) peut être envisagée comme exprimant que la condition (2) est remplie à l'égard de P_1, ψ, C, jouant le rôle de φ, ψ, f. D'ailleurs P_1 est un trinôme du premier degré. Donc, d'après un résultat précédent,

$$C = C_1 P_1 + B\psi, \tag{6}$$

C_1 et B désignant des polynômes entiers.

La valeur (6) de C, portée dans (4), conduit à

$$\Pi f = C_1 P_1 \varphi + (D + B\varphi)\psi.$$

Comme Π contient le facteur P_1, le coefficient de Ψ, donc cette dernière identité, contient aussi ce facteur. Je le supprime, et je désigne par Π_1 le produit des autres trinômes. J'ai alors

$$\Pi_1 f = C_1 \varphi + D_1 \psi. \tag{7}$$

Je répète sur (7) et à l'égard de P_2 le même raisonnement, et ainsi de suite. Je fais ainsi disparaître du coefficient de f dans (4) tous les trinômes relatifs à la solution (α, β).

Si maintenant les conditions analogues à (2) sont satisfaites par f pour toutes les solutions communes à $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, on fera de même disparaître tous les trinômes P', P'', ... Donc f est de la forme (1). C'est ce qu'il fallait démontrer.