BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur des suites de fractions, analogues à la suite de Farey

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 170-175
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__170_0>

Sur des suites de fractions, analogues à la suite de Farey; par M. Halphen.

(Séance du 27 juin 1877.)

1. La *suite de Farey* est constituée par l'ensemble des fractions, réduites à leurs plus simples expressions, dont les dénominateurs ne dépassent pas un nombre donné. Ces fractions sont, en outre, rangées par ordre de grandeur.

Si, dans cette suite, on prend deux fractions distantes de deux rangs, et que l'on compose une nouvelle fraction ayant respectivement pour numérateur et pour dénominateur la somme des termes correspondants des proposées, cette nouvelle fraction est précisément égale à celle qui, dans la suite envisagée, est placée entre les deux proposées.

Ce théorème a été énoncé par Farey à la Société philomathique (*Bulletin des Sciences* pour 1816), et démontré peu après par Cauchy (*ibid.*) (¹). Je me propose de l'étendre ici à d'autres suites analogues, et de démontrer notamment la proposition suivante :

Théorème I. — *Soit une suite de nombres commensurables, réduits à leurs plus simples expressions, rangés par ordre de grandeur, et choisis suivant une loi telle que, si un nombre en est exclu, tous les nombres dont les deux termes sont au moins égaux respectivement aux termes de ce dernier en soient aussi exclus : cette suite jouit de la même propriété que celle de Farey.*

(¹) Le tome V du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1re série) contient également un petit Mémoire de M. Stouvenel sur la suite de Farey.

On peut ajouter, ainsi que Cauchy l'a fait remarquer à l'égard de la suite de Farey : *Deux nombres consécutifs ont leurs dénominateurs premiers entre eux; la différence de ces deux nombres a pour numérateur l'unité.*

2. Soient $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ deux nombres commensurables, réduits à leurs plus simples expressions. Le nombre $\frac{a+a'}{b+b'}$ est compris entre les deux précédents. Pour abréger, j'appellerai ce troisième nombre la *moyenne* des premiers. Étant donnée une suite de n nombres, si l'on y intercale la moyenne entre chaque couple de nombres consécutifs, on forme une nouvelle suite de $(2n-1)$ nombres. Substituer cette nouvelle suite à la précédente sera dit *interpoler* la suite proposée.

Lemme I. — *En interpolant la suite* $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$, *et successivement celles qui s'en déduisent, on reproduit tous les nombres commensurables positifs, chacun une seule fois, et réduit à sa plus simple expression* (¹).

1° Chacun des nombres que l'on produit n'apparaît qu'une seule fois. En effet, les nombres apparaissent toujours rangés par ordre de grandeur dans une quelconque des suites successives.

2° Soit $\frac{a}{b}$ un nombre commensurable, réduit à sa plus simple expression. Je vais chercher sa place dans les suites considérées. Le nombre $\frac{a}{b}$ s'obtient par l'addition des termes de $\frac{0}{1}$, pris b fois avec les termes correspondants de $\frac{1}{0}$, pris a fois. Pour fixer les idées, je suppose $a > b$. Je puis alors remplacer cette addition par celle des termes de $\frac{1}{0}$, pris $(a-b)$ fois, avec ceux de la moyenne $\frac{1}{1}$ de $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$, ces derniers pris b fois. Soit encore $a-b > b$, on

(¹) Cette proposition a été aperçue, bien que non énoncée ni prouvée, par l'auteur d'un intéressant opuscule intitulé : *Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode* par Achille Brocot, horloger. (Paris, 1862.)

peut remplacer cette addition par celle des termes de $\frac{1}{0}$, pris $(a - 2b)$ fois, avec les termes de la moyenne de $\frac{1}{1}$ et de $\frac{1}{0}$, ces derniers pris b fois, et ainsi de suite. De la sorte, si m est l'entier contenu dans $\frac{a}{b}$, je forme m fois de suite la moyenne entre $\frac{1}{0}$ et le nombre le plus voisin précédemment obtenu; et je remplace l'opération par l'addition des termes de $\frac{1}{0}$, pris b fois, avec ceux de la dernière moyenne A $\left(A = \frac{m}{1}\right)$, pris $a - mb = a'$ fois.

J'intercale une nouvelle moyenne A′ entre $\frac{1}{0}$ et A, et je remplace l'opération par l'addition des termes de A, pris $(b - a')$ fois, avec ceux de A′, pris a' fois. La suite des opérations est manifeste, et l'on voit que *le nombre* $\frac{a}{b}$ *apparaît, réduit à sa plus simple expression, après des interpolations dont le nombre est égal à la somme des quotients incomplets de la fraction continue égale à* $\frac{a}{b}$.

3. Lemme II. — *Si deux nombres commensurables, réduits à leurs plus simples expressions, ont leurs dénominateurs premiers entre eux, et que leur différence ait pour numérateur l'unité, les mêmes choses ont lieu à l'égard d'un quelconque de ces deux nombres et de leur moyenne.*

Lemme III. — *Si l'on a*

$$a''b - b''a = 1, \quad a'b'' - b'a'' = 1,$$

le nombre $\frac{a''}{b''}$ *est la moyenne de* $\frac{a}{b}$ *et de* $\frac{a'}{b'}$.

Sans m'arrêter à démontrer ces deux dernières propositions, j'en tire cette conséquence :

Théorème II. — *Si l'on interpole un nombre quelconque de fois la suite* $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$, *deux nombres consécutifs quelconques de la suite obtenue ont leurs dénominateurs premiers entre eux, et leur différence a pour numérateur l'unité.*

Si, en effet, on admet cette proposition pour la suite obtenue après n interpolations, il résulte du lemme II qu'elle a encore lieu après $(n+1)$ interpolations. Or elle a lieu pour la suite originelle $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$. Donc elle est prouvée.

COROLLAIRE. — *Dans la suite obtenue après un nombre quelconque d'interpolations opérées sur* $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$, *chaque nombre est la moyenne de celui qui le précède et de celui qui le suit.*

Ce corollaire découle du théorème II au moyen du lemme III.

4. Appelons, pour abréger, $n^{\text{ième}}$ *suite complète* celle qui se déduit de $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ par n interpolations. Je considère une suite S assujettie à cette seule condition que deux nombres consécutifs quelconques de S soient consécutifs également dans une suite complète. D'après cette définition et en vertu du théorème II, deux nombres consécutifs quelconques de S ont leurs dénominateurs premiers entre eux, et leur différence a pour numérateur l'unité; par conséquent, en vertu du lemme III, si les nombres y sont rangés par ordre de grandeur, chaque nombre est la moyenne de celui qui le précède et de celui qui le suit: donc, pour prouver le théorème I, il me suffira de prouver que la suite dont il est question dans l'énoncé de ce théorème est une suite telle que S.

Soit S′ la suite envisagée. Les suites complètes reproduisant tous les nombres, on formera S′ en faisant des exclusions dans les suites complètes. Soient A, A′ deux nombres consécutifs de la $n^{\text{ième}}$ suite complète, et qui existent dans S′. Je dis que, s'ils ne sont pas consécutifs dans S′, leur moyenne existe dans S′. Si, en effet, la moyenne A″ de A et de A′ est exclue de S′, il en est de même de tous les nombres que l'on obtient par interpolation entre A et A′; car ces nombres ont leurs termes respectivement supérieurs à ceux de A″ et sont dès lors exclus en vertu de la définition de S′ (théorème I). Mais les nombres obtenus par interpolations successives entre A et A′ reproduisent tous les nombres commensurables compris entre ces deux limites (lemme I). Donc A et A′ sont consécutifs dans S′, à moins que leur moyenne A″ ne soit aussi comprise dans la suite. Donc, *dans une suite satisfaisant à la condition énoncée au théorème I, deux nombres consécutifs quelconques sont aussi consécutifs dans une suite complète.*

Le théorème I est par là démontré.

5. La suite de Farey nous fournit l'exemple le plus simple. On peut aussi astreindre les numérateurs à ne pas dépasser une certaine limite; mais cet exemple ne diffère pas au fond du précédent. Soit, en général, $f(a, b)$ un polynôme entier à coefficients positifs. Si l'on astreint $f(a, b)$ à ne pas dépasser une limite assignée, les nombres $\frac{a}{b}$ forment une suite qui vérifie le théorème I.

Les suites complètes sont dans le même cas. D'après l'analyse du n° 2, on peut les définir comme il suit : *La suite complète de rang n est composée par l'ensemble des nombres commensurables dont chacun est égal à une fraction continue où la somme des quotients incomplets n'excède pas le nombre n.*

Les termes de rang pair, dans la $n^{\text{ième}}$ suite complète, donnent lieu à des fractions continues où les sommes des quotients incomplets sont toutes égales à n. On obtient par là toutes les décompositions du nombre n en une somme d'entiers positifs, et l'on en peut déduire que *le nombre des partitions de n en une somme d'entiers positifs est égal à 2^{n-1}, si l'on tient compte de l'ordre des parties.*

En effet, 2^{n-1} est le nombre des termes de rang pair de la suite. Une même partition est fournie deux fois; mais, d'autre part, à une fraction continue

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \ddots + \cfrac{1}{\lambda}}$$

correspondent deux partitions, savoir :

$$n = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,$$
$$n = \alpha + \beta + \ldots + (\lambda - 1) + 1.$$

Le nombre total des partitions est donc bien 2^{n-1}.

Soit, par exemple, $n = 5$: en ne prenant dans la suite que les fractions plus petites que l'unité, on a, pour celles de rang pair, les suivantes :

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{4}{5},$$

qui fournissent les 16 partitions du nombre 5.

6. Les propriétés de la suite de Farey appartiennent encore à des suites qui échappent à la définition donnée dans l'énoncé du théorème I, et qu'il me paraît difficile de définir d'une manière générale. Je me contente d'un exemple : la suite des nombres dans chacun desquels la différence entre le dénominateur et le numérateur n'excède pas une limite donnée. C'est ce qu'il sera aisé de démontrer.

En dernier lieu, je signalerai une curieuse conséquence de l'analyse ci-dessus : *Si l'on interpole continuellement la suite* 1, 1, *chaque nombre p apparaît autant de fois qu'il y a de nombres premiers à p et inférieurs à lui.*

En effet, on engendre ainsi les dénominateurs de toutes les fractions comprises entre $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$.