

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LUCAS

Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 178-190

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__178_0

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens; par M. ÉDOUARD LUCAS.

(Séance du 11 juillet 1877.)

Les développements des fractions en séries par la formule de Maclaurin donnent lieu à un très-grand nombre de formules pour le développement des irrationnelles du second degré, et des fonctions symétriques des racines des équations du second degré à coefficients commensurables. Nous montrerons ultérieurement l'importance de ces développements, dans leur application à la théorie des nombres premiers.

1. Désignons par a et b les deux racines de l'équation

$$(1) \quad x^2 = Px - Q,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et premiers entre eux; nous ne considérerons que le cas des racines réelles. Soient, de plus, les *fonctions numériques simplement périodiques*,

$$(2) \quad U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n;$$

on a, en désignant par $\sqrt{\Delta}$ la différence des racines de l'équation (1),

$$(3) \quad \begin{cases} V_n = 2Q^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \log \frac{a}{b}\right), \\ U_n = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} Q^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \log \frac{a}{b}\right), \\ \frac{U_n}{V_n} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{tang}\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \log \frac{a}{b}\right). \end{cases}$$

Ces relations indiquent l'identité des fonctions U_n et V_n avec les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires. On a ainsi les formules de récurrence

$$(4) \quad \begin{cases} U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n, \\ V_{n+2} = PV_{n+1} - QV_n, \end{cases}$$

qui correspondent exactement à celles de Thomas Simpson :

$$\begin{aligned} \sin(n+2)z &= 2 \cos z \sin(n+1)z - \sin nz, \\ \cos(n+2)z &= 2 \cos z \cos(n+1)z - \cos nz. \end{aligned}$$

On a de même

$$(5) \quad \begin{cases} 2U_{m+n} = U_m V_n + U_n V_m, \\ 2V_{m+n} = V_m V_n - \Delta U_m V_n; \end{cases}$$

ces égalités correspondent aux *formules d'addition* qui donnent $\sin(\gamma + z)$ et $\cos(\gamma + z)$; on a aussi

$$(6) \quad \begin{cases} V_n^2 - \Delta U_n^2 &= 4Q^n, \\ U_n^2 - U_{n-1}U_{n+1} &= +Q^{n-1}, \\ V_n^2 - V_{n-1}V_{n+1} &= -Q^{n-1}\Delta; \end{cases}$$

ces égalités correspondent aux formules

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1, \\ \sin^2 x - \sin(x-y)\sin(x+y) &= \sin^2 y, \\ \cos^2 x - \cos(x-y)\cos(x+y) &= \sin^2 y. \end{aligned}$$

2. La première des formules (6) conduit, par la théorie de la division des fonctions numériques, à la résolution de l'équation de Pell. On a encore

$$(7) \quad \begin{cases} U_{n+r}^2 - Q^r U_n^2 = U_r U_{2n+r}, \\ V_{n+r}^2 - Q^r V_n^2 = \Delta U_r U_{2n+r}; \end{cases}$$

la première des formules (7) a été appliquée par M. Günther, pour $r = 1$, à la résolution de l'équation indéterminée

$$y^2 - Qx^2 = hz,$$

en nombres entiers ⁽¹⁾; il serait facile de généraliser ces considérations.

⁽¹⁾ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Resal, pages 331-341; octobre 1876.

Les deux formules (7) donnent immédiatement

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{U_{(n+1)r}}{V_{nr}} = \frac{U_{2r}}{U_r} - U_r^2 \left[\frac{Q^r}{U_r U_{2r}} + \frac{Q^{2r}}{U_{2r} U_{3r}} + \dots + \frac{Q^{(n-1)r}}{U_{(n-1)r} U_{nr}} \right], \\ \frac{V_{(n+1)r}}{V_{nr}} = \frac{V_r}{V_0} - \Delta U_r^2 \left[\frac{Q^r}{V_0 V_r} + \frac{Q^{2r}}{V_r V_{2r}} + \dots + \frac{Q^{nr}}{V_{(n-1)r} V_{nr}} \right]; \end{cases}$$

et les deux relations

$$(9) \quad \begin{cases} U_{(n+r)} V_n - U_n V_{n+r} = 2 Q^n U_r, \\ V_{(n+r)} V_n - \Delta U_n U_{n+r} = 2 Q^n V_r \end{cases}$$

donnent ainsi

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{U_{n+kr}}{V_{n+kr}} = \frac{U_n}{V_n} + 2 Q^n U_r \left[\frac{1}{V_r V_{n+r}} + \frac{Q^r}{V_{n+r} V_{n+2r}} + \dots + \frac{Q^{(k-1)r}}{V_{n+k-1r} V_{n+kr}} \right], \\ \frac{V_{n+kr}}{U_{n+kr}} = \frac{V_n}{U_n} - 2 Q^n U_r \left[\frac{1}{U_r U_{n+r}} + \frac{Q^r}{U_{n+r} U_{n+2r}} + \dots + \frac{Q^{(k-1)r}}{U_{n+k-1r} U_{n+kr}} \right]. \end{cases}$$

Lorsque n augmente indéfiniment dans les égalités (8), le second membre a pour limite la plus grande α des racines de l'équation (1); et, lorsque k augmente indéfiniment, les seconds membres des égalités (10) ont pour limites $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ et $\sqrt{\Delta}$. On peut ainsi développer la racine carrée d'un nombre entier en séries de fractions ayant pour numérateurs l'unité : c'était un usage familier aux savants de la Grèce et de l'Égypte; ainsi, par exemple, cette valeur approximative

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \varepsilon,$$

rapportée par Columelle au Chapitre V de son Ouvrage *de Rusticâ*; ainsi encore cette valeur approximative

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{12 \cdot 34} + \varepsilon,$$

donnée par les auteurs indiens ⁽¹⁾; cette valeur est égale au quotient $\frac{V_8}{U_8}$, en supposant, dans l'équation (1), que $P = 2$ et $Q = -1$.

(1) M. САНТОН, *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*; Milano, 1877.

3. Les formules qui donnent la somme des sinus ou des cosinus d'arcs en progression arithmétique deviennent

$$(11) \left\{ \begin{aligned} U_m + Q^{-\frac{r}{2}} U_{m+r} + Q^{-\frac{2r}{2}} U_{m+2r} + \dots + Q^{-\frac{nr}{2}} U_{m+nr} \\ = U_{m+\frac{nr}{2}} \frac{U_{\frac{n+1}{2}r} Q^{\frac{m}{4}}}{U_r Q^{\frac{nr}{2}}}, \\ V_m + Q^{-\frac{r}{2}} V_{m+r} + Q^{-\frac{2r}{2}} V_{m+2r} + \dots + Q^{-\frac{nr}{2}} V_{m+nr} \\ = V_{m+\frac{nr}{2}} \frac{U_{\frac{n+1}{2}r} Q^{\frac{m}{4}}}{U_r Q^{\frac{nr}{2}}}; \end{aligned} \right.$$

mais on a les formules plus simples

$$(12) \left\{ \begin{aligned} U_r + U_{2r} + \dots + U_{nr} &= \frac{U_r + Q^n U_{nr} - U_{(n+1)r}}{1 + Q^r - V_r}, \\ V_r + V_{2r} + \dots + V_{nr} &= \frac{V_r + Q^n V_{nr} - V_{(n+1)r}}{1 + Q^r - V_r}. \end{aligned} \right.$$

Si, dans la relation

$$\Delta U_{r+2k\rho} U_{s+2k\sigma} = V_{r+s+2k(\rho+\sigma)} - Q^{s+2k\sigma} V_{r-s+2k(\rho-\sigma)},$$

nous supposons successivement k égal à 0, 1, 2, ..., n , nous obtenons par addition

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} U_{r+2k\rho} U_{s+2k\sigma} &= \frac{U_{r+2n\rho} U_{s+(2n+1)\sigma} - Q^{\sigma-\rho} U_{r+(2n+1)\rho} U_{s+2n\sigma}}{\Delta Q^{n(\rho+\sigma)} U_{\sigma-\rho} U_{\sigma+\rho}} \\ &+ \frac{U_r U_{s-2\sigma} - Q^{\sigma-\rho} U_{r-\rho} U_s}{\Delta U_{\sigma-\rho} U_{\sigma+\rho}}, \end{aligned} \right.$$

et nous trouverions de même les sommations

$$(14) \quad \sum_{k=0}^{k=n} \frac{V_{r+2k\rho} V_{s+2k\sigma}}{Q^{k(\rho+\sigma)}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{k=n} \frac{U_{r+2k\rho} V_{s+2k\sigma}}{Q^{k(\rho+\sigma)}}.$$

On a, en particulier,

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \frac{U_r^2}{Q^r} + \frac{U_{2r}^2}{Q^{2r}} + \frac{U_{3r}^2}{Q^{3r}} + \dots + \frac{U_{(n+1)r}^2}{Q^{(n+1)r}} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{U_{(2n+3)r}}{U_r Q^{(n+1)r}} - 2n - 3 \right], \\ \frac{U_r^2}{Q^r} + \frac{U_{3r}^2}{Q^{3r}} + \frac{U_{5r}^2}{Q^{5r}} + \dots + \frac{U_{(2n+1)r}^2}{Q^{(2n+1)r}} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{U_{4(n+1)r}}{U_{2r} Q^{(2n+1)r}} - 2n - 2 \right], \\ \frac{V_r^2}{Q^r} + \frac{V_{2r}^2}{Q^{2r}} + \frac{V_{3r}^2}{Q^{3r}} + \dots + \frac{V_{nr}^2}{Q^{nr}} &= 2n - 1 + \frac{U_{(2n+1)r}}{U_r Q^{nr}}, \\ \frac{V_r^2}{Q^r} + \frac{V_{3r}^2}{Q^{3r}} + \frac{V_{5r}^2}{Q^{5r}} + \dots + \frac{V_{(2n+1)r}^2}{Q^{(2n+1)r}} &= 2n + 2 + \frac{U_{4(n+1)r}}{U_r Q^{(2n+1)r}}. \end{aligned} \right.$$

On obtient encore

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} U_{m+kr}^2 &= \frac{V_{2m+2(n+1)r} - V_{2m} - Q^{2r}(V_{2m+nr} - V_{2m-2r})}{\Delta(V_{2r} - Q^{2r} - 1)} \\ &\quad - 2Q^m \frac{Q^{(n+1)r} - 1}{\Delta(Q^r - 1)}, \\ \sum_{k=0}^{k=n} V_{m+kr}^2 &= \frac{V_{2m+2(n+1)r} - V_{2m} - Q^{2r}(V_{2m+nr} - V_{2m-2r})}{\Delta(V_{2r} - Q^{2r} - 1)} \\ &\quad + 2Q^m \frac{Q^{(n+1)r} - 1}{Q^r - 1}; \end{aligned} \right.$$

en particulier, pour $P = 1$, $Q = -1$ dans l'équation (1),

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2 = U_n U_{n+1},$$

et, par la première des formules (10),

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2 + 1^2} + \frac{1}{1^2 + 1^2 + 2^2} - \frac{1}{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} + \frac{1}{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2} - \dots$$

4. Pour la multiplication des fonctions numériques, on a d'abord

$$(17) \quad U_{2n} = U_n V_n, \quad 2V_{2n} = V_n^2 - \Delta U_n^2,$$

et, à cause de la première des relations (6),

$$(18) \quad V_{2n} = V_n^2 - 2Q^n.$$

On a ensuite les formules

$$(19) \quad \begin{cases} U_{3n} = \Delta U_n^3 + 3Q^n U_n, \\ U_{5n} = \Delta^2 U_n^5 + 5Q^n \Delta U_n^3 + 5Q^{2n} U_n, \\ U_{7n} = \Delta^3 U_n^7 + 7Q^n \Delta^2 U_n^5 + 14Q^{2n} \Delta U_n^3 + 7Q^{3n} U_n, \\ \dots \end{cases}$$

et aussi

$$(20) \quad \begin{cases} V_{3n} = V_n^3 - 3Q^n V_n, \\ V_{4n} = V_n^4 - 4Q^n V_n^2 + 2Q^{2n}, \\ V_{5n} = V_n^5 - 5Q^n V_n^3 + 5Q^{2n} V_n, \\ V_{6n} = V_n^6 - 6Q^n V_n^4 + 9Q^{2n} V_n^2 - 2Q^{3n} V_n, \\ \dots \end{cases}$$

qui correspondent à des développements bien connus; on en déduit inversement

$$(21) \quad \begin{cases} V_n = \sqrt{2Q^n + V_{2n}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{2Q^{2n} + V_{4n}}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{2Q^{2n} + \sqrt{2Q^{4n} + V_{8n}}}}, \\ \dots \end{cases}$$

Ces formules sont analogues à celles qui donnent $\cos \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{16}$, ...; on trouvera de même des formules semblables à celles qui donnent les expressions de $\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^r}$, $\cos \frac{\pi}{5 \cdot 2^r}$, $\cos \frac{\pi}{15 \cdot 2^r}$, etc.

On peut exprimer les puissances de U_n et de V_n en fonctions linéaires des termes dont les rangs sont des multiples de n , par des formules analogues à celles qui donnent les puissances de $\sin z$ et de $\cos z$ développées suivant les sinus et les cosinus des multiples

de l'arc ε . On a ainsi

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \Delta U_n^2 &= V_{2n} - 2Q^n, \\ \Delta^2 U_n^4 &= V_{4n} - 4Q^n V_{2n} + 6Q^{2n}, \\ \Delta^3 U_n^6 &= V_{6n} - 6Q^n V_{4n} + 15Q^{2n} V_{2n} - 20Q^{3n}, \\ \Delta^4 U_n^8 &= V_{8n} - 8Q^n V_{6n} + 28Q^{2n} V_{4n} - 56Q^{3n} V_{2n} + 70Q^{4n}, \\ &\dots\dots\dots; \\ \Delta U_n^3 &= U_{3n} - 3Q^n U_n, \\ \Delta^2 U_n^5 &= U_{5n} - 5Q^n U_{3n} + 10Q^{2n} U_n, \\ \Delta^3 U_n^7 &= U_{7n} - 7Q^n U_{5n} + 21Q^{2n} U_{3n} - 35Q^{3n} U_n, \\ \Delta^4 U_n^9 &= U_{9n} - 9Q^n U_{7n} + 36Q^{2n} U_{5n} - 84Q^{3n} U_{3n} + 126Q^{4n} U_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

et

$$(23) \left\{ \begin{aligned} V_n^2 &= V_{2n} + 2Q^n, \\ V_n^3 &= V_{3n} + 3Q^n V_n, \\ V_n^4 &= V_{4n} + 4Q^n V_{2n} + 6Q^{2n}, \\ V_n^5 &= V_{5n} + 5Q^n V_{3n} + 10Q^{2n} V_n, \\ V_n^6 &= V_{6n} + 6Q^n V_{4n} + 15Q^{2n} V_{2n} + 20Q^{3n}, \\ V_n^7 &= V_{7n} + 7Q^n V_{5n} + 21Q^{2n} V_{3n} + 35Q^{3n} V_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

5. En désignant par p et n deux nombres quelconques, on a l'identité

$$\frac{z - z^{p^n}}{(1 - z)(1 - z^{p^n})} + \frac{z^{p^n} - z^{p^{n+1}}}{(1 - z)(1 - z^{p^{n+1}})} = \frac{z - z^{p^{n+1}}}{(1 - z)(1 - z^{p^{n+1}})};$$

si l'on fait successivement n égal à 1, 2, 3, ..., n , on obtient en faisant l'addition, et en posant $z = \frac{b^r}{a^r}$,

$$(24) \left\{ \begin{aligned} &\frac{Q^r U_{(p-1)r}}{U_r U_{pr}} + \frac{Q^{p^r} U_{(p-1)r}}{U_{p^r} U_{p^{2r}}} + \frac{Q^{p^{2r}} U_{(p-1)p^{2r}}}{U_{p^{2r}} U_{p^{3r}}} + \dots \\ &+ \frac{Q^{p^{nr}} U_{(p-1)p^{nr}}}{U_{p^{nr}} U_{p^{n+1r}}} = \frac{Q^r U_{(p^{n+1}-1)r}}{U_r U_{p^{n+1r}}}. \end{aligned} \right.$$

On calcule les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions au moyen des formules de multiplication; lorsque n augmente indéfiniment, le second membre de la formule précédente a pour

limite l'expression $\frac{b^r}{U_r}$, et l'on a, par exemple,

$$(25) \quad \frac{b^r}{U_r} = \frac{Q^r}{U_{2r}} + \frac{Q^{2r}}{U_{4r}} + \frac{Q^{3r}}{U_{8r}} + \frac{Q^{4r}}{U_{16r}} + \dots$$

et ainsi

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 2207} + \dots,$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3} + \frac{5}{2^3 \cdot 3 \cdot 17} + \frac{1}{2^4 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 577} + \dots;$$

il est aisé de généraliser la formule (24) qui donne des développements très-rapidement convergents. Cette formule revient au calcul des réduites d'une fraction continue périodique dont les rangs sont en progression géométrique. C'est, en quelque sorte, la *combinaison du calcul logarithmique et du calcul par les fractions continues*. Ainsi le dénominateur de la trentième fraction du développement de $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ a environ *cent millions* de chiffres.

Les formules de duplication

$$U_n V_n = U_{2n} \quad \text{et} \quad \Delta U_n^2 + V_n^2 = 2 V_{2n}$$

donnent

$$\frac{\Delta U_n}{V_n} = \frac{V_n}{U_n} + 2 \frac{V_{2n}}{U_{2n}};$$

en changeant successivement n en $2n, 4n, 8n, \dots$ et ajoutant, on obtient

$$(26) \quad \Delta \left(\frac{U_n}{V_n} + 2 \frac{U_{2n}}{V_{2n}} + \dots + 2^p \frac{U_{2^p n}}{V_{2^p n}} \right) = 2^{p+1} \frac{V_{2^{p+1}n}}{U_{2^{p+1}n}} - \frac{V_n}{U_n},$$

et, en divisant par 2^p et faisant croître p indéfiniment,

$$(27) \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \frac{\frac{U_n}{V_n} + 2 \frac{U_{2n}}{V_{2n}} + 2^2 \frac{U_{4n}}{V_{4n}} + 2^3 \frac{U_{8n}}{V_{8n}} + \dots}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots};$$

cette formule correspond à la formule connue

$$\frac{1}{x} - 2 \cot x = \tan x + \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} + \dots$$

6. Soit $F(x)$ une fonction développable en série convergente pour toutes les valeurs de la variable dont le module est inférieur à l'unité ; par exemple,

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots ;$$

on aura, par conséquent, en supposant z positif,

$$F\left(\frac{z}{1+z}\right) = A_0 + A_1 \frac{z}{1+z} + A_2 \frac{z^2}{(1+z)^2} + \dots + A_n \frac{z^n}{(1+z)^n} + \dots$$

$$F\left(\frac{1}{1+z}\right) = A_0 + A_1 \frac{1}{1+z} + A_2 \frac{1}{(1+z)^2} + \dots + A_n \frac{1}{(1+z)^n} + \dots ;$$

donc, par addition et soustraction, en faisant $z = \frac{b^r}{a^r}$ (avec la condition de r pair, lorsque les racines a et b sont de signes contraires),

$$(28) \begin{cases} F\left(\frac{a^r}{V_r}\right) + F\left(\frac{Q^r}{V_r}\right) = 2A_0 + A_1 \frac{V_r}{V_r} + A_2 \frac{V_{2r}}{V_r^2} + A_3 \frac{V_{3r}}{V_r^3} + \dots, \\ F\left(\frac{a^r}{V_r}\right) - F\left(\frac{Q^r}{V_r}\right) = \sqrt{\Delta} \left(A_1 \frac{U_r}{V_r} A_2 + \frac{U_{2r}}{V_r^2} + A_3 \frac{U_r}{V_r^3} + \dots \right). \end{cases}$$

Si l'on suppose $z = -\frac{b^r}{a^r}$, on obtient deux développements analogues aux précédents ; mais, bien que ces développements soient beaucoup moins rapidement convergents que ceux du n° 5, leur étude paraît plus importante au point de vue de l'*Arithmétique supérieure*, dans les recherches concernant les lois de la dissémination des nombres premiers dans les séries à termes commensurables.

Le développement du binôme $(1-x)^m$ donne ainsi, pour m quelconques, les développements

$$(29) \begin{cases} \frac{V_{mr}}{V_r^m} = V_0 - \frac{m}{1} \frac{V_r}{V_r} + \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{V_{2r}}{V_r^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \frac{V_{3r}}{V_r^3} + \dots, \\ \frac{U_{mr}}{V_r^m} = \frac{m}{1} \frac{U_r}{V_r} - \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{U_{2r}}{V_r^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \frac{U_{3r}}{V_r^3} + \dots, \end{cases}$$

que l'on peut déduire directement de la formule de Bernoulli ;

pour $m = -1$, on a

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{V_r^2}{Q^r} = V_0 + \frac{V_r}{V_r} + \frac{V_{2r}}{V_r^2} + \frac{V_{3r}}{V_r^3} + \dots \\ \frac{U_{2r}}{Q^r} = \frac{U_r}{V_r} + \frac{U_{2r}}{V_r^2} + \frac{U_{3r}}{V_r^3} + \frac{U_{4r}}{V_r^4} + \dots; \end{cases}$$

par exemple, pour $P = 1$ et $Q = -1$,

$$\begin{aligned} 9 &= 2 + \frac{3}{3} + \frac{7}{9} + \frac{18}{27} + \frac{47}{81} + \dots \\ 3 &= \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{8}{27} + \frac{21}{81} + \frac{55}{243} + \dots; \end{aligned}$$

les numérateurs de ces deux séries de fractions sont donnés par la relation de récurrence

$$N_{n+1} = 3N_{n+1} - N_n.$$

On obtiendra des formules analogues en supposant $m = \pm \frac{1}{2}$; le développement de $(1+x)^m \pm (1-x)^m$ donne aussi d'autres formules.

Le développement de $\log(1-x)$ donne les formules

$$(31) \quad \begin{cases} \log \frac{V_r^2}{Q^r} = \frac{V_r}{V_r} + \frac{1}{2} \frac{V_{2r}}{V_r^2} + \frac{1}{3} \frac{V_{3r}}{V_r^3} + \frac{1}{4} \frac{V_{4r}}{V_r^4} + \dots, \\ \log \frac{b^{2r}}{Q^r} = 2\sqrt{\Delta} \left(\frac{U_r}{V_r} + \frac{1}{2} \frac{U_{2r}}{V_r^2} + \frac{1}{3} \frac{U_{3r}}{V_r^3} + \frac{1}{4} \frac{U_{4r}}{V_r^4} + \dots \right); \end{cases}$$

et celui de $\log \frac{1-x}{1+x}$ donne.

$$(32) \quad \log \frac{b^{2r}}{Q^r} = 2\sqrt{\Delta} \left(\frac{U_r}{V_r} + \frac{1}{3} \frac{\Delta U_r^3}{V_r^3} + \frac{1}{5} \frac{\Delta^2 U_r^5}{V_r^5} + \frac{1}{7} \frac{\Delta^3 U_r^7}{V_r^7} + \dots \right).$$

La formule connue ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \frac{z+h}{z-h} &= hz \left[\frac{1}{z^2-h^2} - \frac{2}{3} \frac{h^2}{(z^2-h^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{h^4}{(z^2-h^2)^3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{h^6}{(z^2-h^2)^4} + \dots \right], \end{aligned}$$

(1) HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. 1, p. 272.

dans laquelle on fait

$$z + h = a^r, \quad z - h = b^r, \quad z^2 - h^2 = Q^r, \quad h^2 = \frac{\Delta U_r^2}{4},$$

donne

$$(33) \quad \log \frac{a^{2r}}{Q^r} = \frac{\sqrt{\Delta} U_r}{2} \left(\frac{1}{Q^r} - \frac{2}{3} \frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^{2r}} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{4r}} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{\Delta^3 U_r^6}{2^6 Q^{6r}} + \dots \right);$$

on suppose, pour la convergence, $\Delta U_r^2 \leq 4Q^r$; on a ainsi, à la limite de convergence,

$$\log(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots \right).$$

Les développements de arc sin z et de (arc sin z)² donnent de même

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \frac{a^{2r}}{Q^r} = \frac{\sqrt{\Delta} U_r}{Q^{\frac{r}{2}}} \left[1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} + \frac{(1 \cdot 3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} - \dots \right], \\ \frac{1}{4} \log^2 \frac{a^{2r}}{Q^r} = \frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} - \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} \frac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 5} \frac{\Delta^3 U_r^6}{2^6 Q^{3r}} - \dots, \end{array} \right.$$

et à la limite de convergence

$$\log(1 + \sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(1 \cdot 3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,$$

$$\log^2(1 + \sqrt{2}) = 1 - \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \quad (1).$$

La formule remarquable de M. Scholtz (*) conduit au développement

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log^3 \frac{a^{2r}}{Q^r} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}} U_r^3}{Q^{\frac{3r}{2}}} \left\{ 1 - \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \frac{\Delta U_r^2}{2^2 Q^r} \right. \\ \quad \quad \quad \left. + \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 7} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \right) \frac{\Delta^2 U_r^4}{2^4 Q^{2r}} - \dots \right. \\ \quad \quad \quad \left. \pm \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2n \cdot (2n+1)} \left[1 + \frac{1}{3^2} + \dots \right. \right. \\ \quad \quad \quad \left. \left. + \frac{1}{(2n-1)^3} \right] \frac{\Delta^{n-1} U_r^{2n-2}}{2^{2n-2} Q^{(n-1)r}} + \dots \right\} \end{array} \right.$$

(¹) LAISANT, *Essai sur les fonctions hyperboliques*. Paris, Gauthier-Villars, 1874; p. 26.

(²) J. BERTRAND, *Traité de Calcul différentiel*, p. 424.

et à la limite de convergence

$$\log^3(1 + \sqrt{2}) = 1 - \frac{3.3}{4.5} \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{3.5.3}{4.6.7} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) - \dots$$

7. Les quantités a^r et b^r sont les racines de l'équation

$$z^2 - zV_r + Q^r = 0;$$

si l'on développe l'une des racines par la formule de Lagrange, on a ainsi

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} b^r = \frac{Q^r}{V_r} + \frac{Q^{2r}}{V_r^2} + \frac{4}{2} \frac{Q^{3r}}{V_r^3} + \frac{5.6}{2.3} \frac{Q^{4r}}{V_r^4} + \dots, \\ \log b^r = \log \frac{Q^r}{V_r} + \frac{Q^r}{V_r^2} + \frac{3}{2} \frac{Q^{2r}}{V_r^3} + \frac{5.4}{2.3} \frac{Q^{3r}}{V_r^4} + \dots, \\ \frac{b^{3r}}{3} = \frac{Q^{2r}}{2V_r^2} + \frac{Q^{3r}}{V_r^3} + \frac{5}{2} \frac{Q^{4r}}{V_r^4} + \frac{7.6}{2.3} \frac{Q^{5r}}{V_r^5} + \dots \end{array} \right.$$

L'équation précédente donne

$$b^r = \frac{V_r - \sqrt{V_r^2 - 4Q^r}}{2},$$

et par le développement du radical par la formule du binôme

$$(37) \quad b^r = \frac{1}{2} \frac{2Q^r}{V_r} + \frac{1}{2.4} \frac{2^3 Q^{2r}}{V_r^3} + \frac{1.3}{2.4.6} \frac{2^5 Q^{3r}}{V_r^4} + \dots;$$

en particulier à la limite de convergence

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \dots$$

On a encore

$$(38) \quad b^r = \frac{Q^r}{V_r} + \frac{Q^{2r}}{V_r^2} + \frac{4}{2} \frac{Q^{3r}}{V_r^3} + \frac{6.5}{2.3} \frac{Q^{4r}}{V_r^4} + \frac{8.7.6}{2.3.4} \frac{Q^{5r}}{V_r^5} + \dots$$

Si l'on applique la formule de Burmann au développement de z suivant les puissances de $\frac{2z}{1+z^2}$, on obtient pour tout module de z

inférieur à l'unité

$$z = \frac{1}{2} \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{2z}{1+z^2} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{2z}{1+z^2} \right)^5 + \dots,$$

et, si l'on fait $z^2 = \frac{b^r}{a^r}$, on retrouve la formule (37).
