BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FOURET

Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 19-24
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__19_1>

Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique; par M. G. Fouret.

(Séance du 29 novembre 1876.)

I. La question qui a pour objet la détermination du nombre des points de contact des courbes d'un système (μ, ν) avec une courbe algébrique a, comme on sait, été traitée par plusieurs géomètres. La formule qui donne ce nombre a été démontrée de diverses manières, dans le cas des systèmes de courbes algébriques et aussi tout récemment dans le cas des systèmes de courbes quelconques. Mais, de toutes ces démonstrations, la plus simple et la plus lumineuse est, à notre avis, celle qui a été imaginée par M. Brill (*Math.*

Ann., t. VIII, 1875). Bien que l'auteur ne l'ait donnée que pour le cas des systèmes de courbes algébriques, on reconnaît sans peine qu'elle s'applique de tout point aux systèmes de courbes quelconques. Cette démonstration, basée sur l'emploi du principe de correspondance, donne véritablement la *raison d'être* du théorème, si bien que, si nous l'avions connue plus tôt, nous nous serions dispensé d'en chercher une autre (¹).

II. Le mode de démonstration employé par M. Brill nous a paru pouvoir s'appliquer avec succès à d'autres questions concernant les systèmes de courbes. Nous allons tout d'abord en faire usage pour compléter le théorème relatif au contact des courbes d'un système avec une courbe algébrique, en considérant le cas, jusqu'à présent exclu, où il y aurait croisement ou convergence d'une infinité de branches du système en un ou plusieurs points de la courbe algébrique. A cet effet, nous allons reprendre la démonstration de M. Brill, en y introduisant seulement l'hypothèse que nous venons d'indiquer.

Dans le plan de la figure, prenons une droite D quelconque. La courbe fixe C étant supposée du $m^{ième}$ degré et de la $n^{ième}$ classe, menons d'un point x de D les n tangentes à C. En chacun des n points de contact passent μ courbes du système. Les tangentes à ces courbes en ces n points vont couper D en $n\mu$ points y, qui correspondent au point x choisi. Inversement, prenons un point y quelconque sur D. Les tangentes aux courbes du système issues de y ont leur point de contact sur une courbe de degré $\mu + \nu$ qui possède en y un point multiple d'ordre μ. Ce dernier lieu a de plus un point singulier en chacun des points de C par lesquels passent une infinité de branches du système. Il coupe par suite C en un nombre total de points égal à $m(\mu + \nu)$, parmi lesquels figurent avec un certain degré de multiplicité les points singuliers précités. Si nous désignons par ω le nombre total des points ainsi absorbés, il reste $m(\mu + \nu) - \omega$ points d'intersection simples, et les tangentes à C en ces derniers points vont couper D en $m(\mu + \nu) - \omega$ points x, correspondant au point initial y.

En vertu du principe de correspondance, il y a par suite sur D

(¹) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXII, p. 1328.

$\mu + m(\mu + \nu) - \omega$ coïncidences d'un point x avec son correspondant y. D'ailleurs, chacune de ces coïncidences fournit un contact d'une branche du système avec la courbe C, à moins toutefois que ces coïncidences n'aient lieu aux points d'intersection de C avec D. Or chacun de ces points d'intersection, au nombre de m, comprend μ coïncidences étrangères à la question. En déduisant $m\mu$ du nombre total trouvé ci-dessus, il reste $n\mu + m\nu - \omega$. Tel est le nombre des contacts des branches du système avec la courbe algébrique, en dehors des points singuliers.

Dans le cas où les courbes du système sont indépendantes de C, ω est nul, et l'on retrouve le théorème connu consistant en ce que *le nombre des contacts des branches d'un système* (μ, ν) *avec une courbe algébrique du* $m^{\text{ième}}$ *degré et de la* $n^{\text{ième}}$ *classe, indépendante du système, est égal à* $n\mu + m\nu$.

III. Il est facile de voir quelle est la marche à suivre pour déterminer le nombre ω à soustraire du nombre précédent, dans le cas où il existe en un ou plusieurs points de C un croisement d'une infinité de branches du système. En effet, de la démonstration précédente il résulte que ce nombre ω n'est autre chose que le nombre des points d'intersection de C et de la courbe lieu des points de contact des tangentes menées par un point quelconque aux courbes du système, qui sont confondus avec les points singuliers de ce dernier lieu provenant des points singuliers du système. On est ainsi ramené au problème qui consiste à trouver le nombre des points d'intersection de deux courbes algébriques, qui sont confondus en un point commun, multiple pour l'une au moins des deux courbes. Cette question a été traitée par plusieurs géomètres, parmi lesquels nous citerons MM. Cayley, de la Gournerie, Painvin, Halphen (1).

Il est bon de remarquer que le cas où une ou plusieurs des tangentes de la courbe C seraient touchées par une infinité de branches du système se traiterait de la même manière et donnerait lieu à un certain abaissement du nombre $n\mu + m\nu$.

IV. Nous allons montrer maintenant comment on peut, par un procédé analogue à celui employé par M. Brill, *déterminer le nombre*

(1) *Voir*, pour l'historique de cette question, le Mémoire de M. Halphen, publié dans le *Bulletin de la Société*, t. III, p. 76.

des points d'une courbe algébrique en lesquels cette courbe est coupée sous un angle donné par une des branches d'un système donné.

Nous prendrons comme point de départ ce théorème, d'ailleurs connu, d'après lequel, *si une courbe algébrique plane du $m^{ième}$ degré et de la $n^{ième}$ classe a deux points multiples d'ordre r confondus avec les deux points circulaires à l'infini, le nombre des droites issues d'un point quelconque du plan et coupant la courbe donnée sous un angle donné de grandeur et de sens de rotation est égal à* $m + n - 2r$.

Ce théorème se conclut du reste immédiatement du théorème relatif au contact des courbes d'un système avec une courbe algébrique. Considérons, en effet, le système des spirales logarithmiques ayant pour pôle un point quelconque du plan O, et coupant les rayons vecteurs issus de ce pôle sous l'angle donné compté dans le sens de rotation assigné. Ce système a pour caractéristiques $\mu = 1$, $\nu = 1$, et, ainsi que je l'ai fait remarquer dans un travail précédent, il a une infinité de branches imaginaires convergeant asymptotiquement vers chacun des points circulaires de l'infini. Comme, d'ailleurs, chacun de ces points est simple sur le lieu des points de contact des tangentes au système issu d'un point quelconque (cercle), on a

$$\omega = 2r \qquad \text{et} \qquad n\mu + m\nu - \omega = m + n - 2r.$$

Tel est le nombre des obliques inclinées de l'angle donné dans un sens déterminé sur la courbe C, que l'on peut mener par le point O.

Cela posé, prenons une droite D quelconque dans le plan qui contient la courbe C et le système donnés; puis, par un point x quelconque de cette droite, menons les $m + n - 2r$ droites coupant C sous l'angle donné de grandeur et de sens de rotation. En chacun de ces points passent μ branches du système et leurs μ tangentes qui déterminent sur DB μ points y, d'où résultent $(m + n - 2r)\mu$ points y correspondant au point x. Inversement, prenons un point y quelconque sur D, et considérons le lieu des points de contact des tangentes menées de y aux courbes du système. Ce lieu, de degré $\mu + \nu$, coupe la courbe C en $m(\mu + \nu) - \omega$ points, ω ayant la signification indiquée ci-dessus. En chacun de ces $m(\mu + \nu) - \omega$ points, traçons la droite qui coupe C suivant l'angle donné. Les $m(\mu+\nu)-\omega$ droites ainsi obtenues déterminent sur D autant de points x qui correspondent au point de départ y. Par suite, et en vertu du principe de correspondance, il y a

$$(m+n-2r)\mu+m(\mu+\nu)-\omega$$

coïncidences d'un point x avec son correspondant y. De ce nombre il faut déduire les $m\mu$ coïncidences confondues avec les m points d'intersection de C avec D, qui ne répondent pas à la question. Le nombre restant, à savoir $(m+n-2r)\mu+m\nu-\omega$, fournit la solution cherchée.

En particulier, lorsque les courbes du système (μ, ν) sont indépendantes de C, ω est nul, et l'on obtient le théorème suivant :

Le nombre des points d'une courbe algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré, de la $n^{\text{ième}}$ classe et ayant deux points multiples d'ordre r aux points circulaires de l'infini en lesquels cette courbe est rencontrée sous un angle donné de grandeur et de sens de rotation par les branches d'un système (μ, ν) indépendant de la courbe, est égal à $(m+n-2r)\mu+m\nu$ (1).

Le même procédé de démonstration s'applique à un très-grand nombre de questions relatives, comme la précédente, à l'intersection dans des conditions données d'une courbe algébrique avec les branches d'un système. Nous avons l'intention de traiter ce sujet d'une manière plus complète dans un prochain travail.

V. L'objet principal de cette Note était de montrer comment les singularités des systèmes de courbes s'introduisent, sans occasionner d'autres difficultés que celles déjà connues et en partie résolues dans la théorie des courbes algébriques. La définition analytique, que nous avons donnée des systèmes de courbes dans le plan, peut devenir ici d'un grand secours. En effet, si

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$$

est l'équation d'un pareil système, on reconnaît qu'un point $x=a$, $y=b$ est un point singulier par lequel passent une infinité de

(1) *Voir* une autre démonstration du même théorème (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXIII, p. 633).

branches du système, si l'équation

$$\varphi(a, b, p) = 0$$

est vérifiée quel que soit p. Si ce même point $x = a$, $y = b$ est un point simple ou multiple d'une courbe algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

la portion du nombre désignée ci-dessus par ω, qui se rapporte au point $x = a$, $y = b$, n'est autre chose que le nombre des points communs à la dernière courbe et à la courbe

$$\varphi(x, y, p) = 0,$$

qui sont confondus au point considéré. Cela résulte immédiatement des démonstrations données plus haut, et de cette simple remarque que la dernière équation définit le lieu des points de contact des tangentes aux courbes du système menées parallèlement à la droite $y = px$.