BULLETIN DE LA S. M. F.

H. BROCARD

Note sur la division mécanique de l'angle

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 43-47
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__43_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Note sur la division mécanique de l'angle; par M. H. BROCARD.

(Séance du 29 novembre 1876.)

Puisque l'occasion m'est fournie par l'article de M. Perrin, publié p. 85 du t. IV du *Bulletin,* de revenir sur la question de la trisection de l'angle, je demanderai à résumer ici quelques observations de détail.

Le mode de trisection par le *limaçon de Pascal* ou *conchoïde du cercle,* indiqué dans cette Note, est identique à celui qui a été décrit dans ma précédente Communication, insérée p. 47 du t. III. Cette propriété a été découverte par Archimède.

Depuis la publication de cette Note, M. Laisant a présenté à la Session du Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, tenu à Nantes (séance du 21 août 1875), le *compas trisecteur,* dont le principe seul avait été exposé dans le *Bulletin.*

Deux dispositions ont même été proposées pour la construction de ce système articulé. Le constructeur aurait à juger quelle serait celle des deux combinaisons qu'on devrait considérer comme la plus pratique.

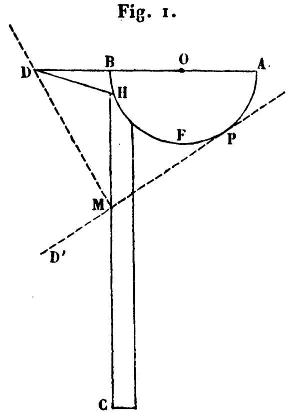
Une étude très-détaillée et très-complète de la trisection, ou même de la multisection mécanique de l'angle, en un nombre quelconque de parties égales, se trouve dans le t. II (année 1863) des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (26 p. avec planches).

Ce Mémoire, dû à M. Glotin, ancien lieutenant de vaisseau, est intitulé : *De quelques moyens pratiques de diviser les angles en parties égales.*

Voici quelques extraits de ce travail, qui m'ont paru devoir offrir quelque intérêt aux lecteurs du *Bulletin.*

Principe d'un trisecteur. — M. Glotin signale, comme depuis longtemps connu, un *trisecteur* composé d'une règle rectangulaire BC, d'un disque demi-circulaire BFPA tangent à la règle BC, à l'extrémité B, et d'une pointe triangulaire BDH sur le prolongement BD du diamètre AB, et d'une longueur BD égale au rayon OB du disque (*fig.* 1).

Fig. 1.



Emploi du trisecteur. — Soit DMP un angle à trisecter, il suffira d'amener la règle BC sur le sommet M, le point D sur le côté MD, et la circonférence BFPA à être tangente au côté OP. Alors BM et OM sont les deux trisectrices.

Il suffit, en effet, de remarquer que cette construction résout la question suivante, inverse de la proposée :

Étant donnés deux points D *et* D′, *situés d'un même côté d'une droite* BC, *trouver sur celle-ci un point* M, *tel qu'en joignant* MD′ *et* MD, *l'angle* D′MC *soit double de l'angle* DMB (*voir* P. Serret, *Des méthodes en Géométrie,* 1855, p. 7).

Principe d'un multisecteur. — Si l'on ajoute au trisecteur une longueur DN = DO, fixée en son milieu à une perpendiculaire passant par le point M, on obtierdra un *quintisecteur,* et en répétant cette même modification, on obtiendra un instrument donnant la division en 7, 9, ... $(2n+1)$ parties égales.

La division en $2m$ parties égales dépend du problème précédent si m est impair; elle se fait avec le compas ordinaire si m est pair.

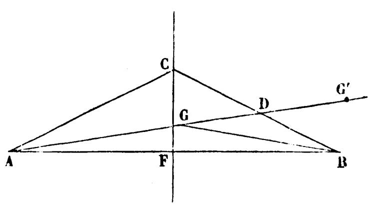
Ainsi que le fait remarquer M. Glotin, de tels instruments sont d'une construction très-délicate et très-difficile, et leur usage est assez restreint, puisqu'ils ne conviennent qu'à de grands angles.

Revenant alors à la trisection, M. Glotin a cherché une construction graphique fondée sur l'emploi d'une courbe trisectrice.

Plusieurs courbes permettent de résoudre la question :

1° *La strophoïde oblique.* — Soient BAC = α l'angle donné, FC une perpendiculaire à AB en son milieu F; G, D les points de AD et de BC qui appartiennent à la trisectrice rectiligne DGA;

Fig 2.



on a GD = DB. Le lieu des points G, lorsque AD varie et tourne autour du point A, est donc une strophoïde oblique, tangente en A à AC, ayant B pour point double, et admettant pour asymptote une parallèle à BC, à une distance double de celle du point A à BC. Le point G′ de AD, symétrique du point G par rapport à D, appartient au lieu (*fig.* 2).

En prenant A pour pôle et $AB = a$ pour axe polaire, cette courbe a pour équation

$$\rho = a \frac{\cos(\alpha - \omega)}{\cos(\alpha + \omega)}.$$

L'auteur n'indique pas de construction mécanique de cette courbe, de sorte qu'il faut chercher un nombre suffisant de points isolés, qu'on relie ensuite par un trait continu.

2° *La conchoïde de Nicomède.* — Par le point C menons à AB une parallèle CP qui rencontre la trisectrice AGD au point P. On a $GP = 2AC$. Le lieu des points P est une conchoïde de Nicomède, courbe *mécanique,* que les anciens ont fait servir à la trisection de l'angle et à la duplication du cube (*problème Déliaque*), et dont Newton a indiqué l'emploi pour la résolution graphique des équations des troisième et quatrième degrés (*voir* MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques,* t. I, p. 255-257).

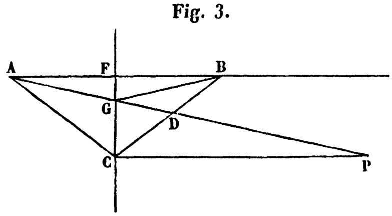
En prenant A pour pôle et AB pour axe polaire, l'équation de la courbe s'obtient immédiatement, et en posant $AC = a$ et $AF = b$, on a

$$\rho = \frac{b}{\cos\omega} + 2a,$$

c'est-à-dire la *conchoïde* de la droite (*fig.* 3).

A défaut de tracé mécanique, M. Glotin recommande l'emploi

Fig. 3.



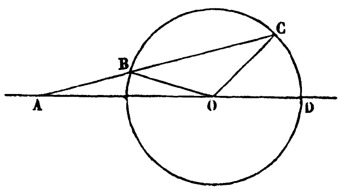
d'une règle graduée, ou même du bord d'une feuille de papier pliée, portant l'indication du segment GP à intercepter.

3° *Le limaçon de Pascal.* — Considérons un cercle O, un diamètre OA et un angle BOC. Si le prolongement BA de BC, limité au diamètre, est égal au rayon, l'angle BAO ou BOA sera égal au tiers de l'angle COD (Archimède).

Si donc on donne l'angle COD, et que l'on prenne sur les rayons vecteurs issus du point C des longueurs BA, BA' égales au rayon du cercle, la courbe qui en résultera rencontrera OA au point A, et l'on n'aura qu'à joindre CA (*fig.* 4).

Le lieu des points A est la *conchoïde du cercle* ou *limaçon de*

Fig. 4.



Pascal. Son équation polaire, en prenant C pour pôle et CO pour axe polaire, est

$$\rho = 2a\cos\omega \pm a = a(2\cos\omega \pm 1).$$