BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Partition des nombres

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 76-78
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__76_0>

Sur la partition des nombres; par M. Laguerre.

(Séance du 21 février 1877.)

1. Le problème à résoudre est le suivant : *Étant donnés des nombres entiers* a, b, ..., z *et un nombre entier variable* N, *trouver le nombre des solutions en nombres* entiers *et* positifs *de l'équation*

$$N = ax + by + \ldots + lu.$$

Comme l'a remarqué Euler, le nombre T(N) des solutions est égal au coefficient de N dans le développement de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)\ldots(1-z^l)}$$

suivant la puissance croissante de z.

Je me propose ici de trouver, non pas la valeur exacte de T(N), mais une formule qui donne une valeur approchée de cette fonction, l'erreur commise ayant d'ailleurs une limite fixe *indépendante de la valeur de* N [1].

2. Je m'appuierai sur le lemme suivant :

Lemme. — *Soit* $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ *une fraction rationnelle telle, que les racines de l'équation* $f(z) = 0$ *soient toutes inégales et aient toutes pour module l'unité ; si l'on développe cette fraction en série suivant les puissances croissantes de* z, *tous les coefficients du développement demeurent, en valeur absolue, inférieurs à une limite déterminée.*

Démonstration. — Soit

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \Phi(z) + \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} + \ldots + \frac{L}{z-\lambda},$$

$\Phi(z)$ désignant la partie entière de la fraction et α, β, ..., γ les

---

[1] Les résultats contenus dans cette Note ne sont peut-être pas nouveaux ; mais ils me paraissent peu connus, et, en raison de leur simplicité, j'ai pensé qu'ils pourraient intéresser quelques lecteurs.

racines de l'équation $f(z) = 0$; le coefficient d'une puissance quelconque de z dans le développement de la fraction sera de la forme

$$p + A\alpha^n + B\beta^n + \ldots + L\lambda^n,$$

p désignant, s'il y a lieu, le terme provenant de Φ.

Le terme complémentaire $A\alpha^n + B\beta^n + \ldots + L\lambda^n$ est, en vertu d'un théorème bien connu, inférieur à la somme des modules de ses différents termes et par conséquent inférieur à $A + B + \ldots + L$.

Le lemme est donc démontré.

3. Considérons maintenant l'expression

$$F(z) = \frac{1}{(1 - z^a)(1 - z^b)\ldots(1 - z^l)};$$

décomposons cette expression en fractions simples et réunissons en un même groupe $\Phi(z)$ toutes les fractions dont le dénominateur est une puissance supérieure à la première d'un des facteurs du dénominateur $F(z)$; réunissons de même dans un groupe $\varphi(z)$ toutes les fractions qui ont l'un de ces facteurs pour dénominateur.

On aura évidemment

$$F(z) = \Phi(z) + \varphi(z),$$

et, en désignant respectivement par $\Theta(N)$ et $\theta(N)$ les coefficients de x^N dans les développements de $\Phi(z)$ et de $\varphi(z)$,

$$T(N) = \Theta(N) + \theta(N).$$

Le dénominateur de $\varphi(z)$ n'ayant que des racines simples dont le module est égal à l'unité, il suit du lemme énoncé plus haut que $\theta(N)$ reste en valeur absolue inférieur à une quantité donnée; on aura donc approximativement

$$T(N) = \Theta(N),$$

l'erreur commise étant inférieure à une limite fixe indépendante du nombre N.

4. *Applications.* — Soit à résoudre, en nombres entiers et positifs, l'équation $ax + by = N$, a et b étant deux nombres entiers

premiers entre eux; on aura dans ce cas

$$F(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)}$$

et

$$\Phi(z) = \frac{1}{ab}\,\frac{1}{(1-z)^2};$$

d'où

$$\Theta(N) = \frac{N+1}{ab},$$

et par suite, en négligeant la quantité constante $\frac{1}{ab}$, ce qui est permis eu égard à l'approximation que l'on veut obtenir,

$$T(N) = \frac{N}{ab}.$$

C'est la formule donnée par Paoli et l'on sait, dans ce cas, que l'erreur est moindre que l'unité.

Soit encore à résoudre l'équation

$$ax + by + cz = N,$$

a, b et c étant trois nombres premiers entre eux.

On aura dans ce cas

$$\Phi(z) = \frac{1}{abc}\,\frac{1}{(1-z)^3} + \frac{a+b+c-3}{2\,abc}\,\frac{1}{(1-z)^2};$$

d'où, en négligeant une quantité constante, ce qui est permis vu l'approximation que l'on veut obtenir,

$$T(N) = \frac{N}{2\,abc}(N + a + b + c).$$