

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

**Sur le développement en fraction continue de  $e^{\arctan \frac{1}{x}}$**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 5 (1877), p. 95-99

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1877\\_\\_5\\_\\_95\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__95_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Sur le développement en fraction continue de  $e^{\text{arc tang}(\frac{1}{x})}$ ;*  
par M. LAGUERRE.

(Séance du 21 mars 1877.)

1. Posons

$$e^{\text{arc tang}(\frac{1}{x})} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

$\varphi(x)$  et  $f(x)$  désignant des polynômes du degré  $n$  et  $\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$  une

série développée suivant les puissances décroissantes de  $\frac{1}{x}$  et commençant par un terme de la forme  $\frac{\varepsilon}{x^{2n+1}}$ .

Comme  $e^{\arctan(\frac{1}{x})}$  se change en son inverse quand on change  $x$  en  $-x$ , il en résulte qu'à un facteur numérique près  $\varphi(x)$  est égal à  $f(-x)$ ; d'ailleurs pour  $x = \pm \infty$ , le rapport  $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$  se réduit à l'unité; on a donc

$$\varphi(x) = (-1)^n f(-x).$$

En employant la méthode que j'ai exposée dans une Note précédente <sup>(1)</sup>, on obtient facilement l'équation différentielle suivante, à laquelle satisfait le polynôme  $f(x)$ ,

$$(1) \quad (1 + x^2)y'' + (2x - 1)y' - n(n + 1)y = 0.$$

Le polynôme  $\varphi(x)$  satisfait à l'équation

$$(1 + x^2)u'' + (2x + 1)u' - n(n + 1)u = 0,$$

équation qui se déduit de la précédente par la substitution

$$y = ue^{-\arctan(\frac{1}{x})},$$

ou encore

$$y = ue^{\arctan x}.$$

On en conclut que l'intégrale générale de l'équation (1) est donnée par la formule

$$y = Af(x) + Bf(-x)e^{\arctan x},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

## 2. Posons

$$x = i(1 - 2z),$$

d'où

$$z = \frac{1 + ix}{2},$$

(1) Sur l'approximation d'une fonction d'une variable au moyen de fractions rationnelles (*Bulletin de la Société mathématique*, p. 78 de ce tome).

l'équation (1) deviendra

$$(z - z^2)y'' + \left(1 + \frac{i}{2} - 2z\right)y' + n(n+1)y = 0,$$

équation qui définit une série hypergéométrique  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ , pour laquelle on a

$$\gamma = 1 + \frac{i}{2}, \quad \alpha = -n \quad \text{et} \quad \beta = n + 1.$$

Cette série est évidemment un polynôme du degré  $n$  en  $z$ ; on a, par suite, en désignant par  $K$  un facteur indépendant de  $x$ ,

$$f(x) = KF\left(-n, n+1, \gamma, \frac{1+ix}{2}\right).$$

Convenons de déterminer le polynôme  $f(x)$  par la condition que  $\frac{f(x)}{x^n}$  soit, pour  $x = +\infty$ , égal à

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n};$$

en divisant les deux membres de la relation précédente par  $x^n$  et en faisant croître indéfiniment  $x$ , il viendra

$$1 = K \frac{i^n}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)},$$

d'où

$$F(-n, n+1, \gamma, z) = \frac{i^n f(x)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}.$$

Si, pour plus de clarté, nous représentons  $f(x)$  par  $V_n$ , et si nous posons, pour abrégé,

$$F(-n, n+1, \gamma, z) = F(-n),$$

on déduit de là

$$(2) \quad \frac{F(-n)}{V_n \frac{i}{\gamma+n-1}} = \frac{F(-n+1)}{V_{n-1}} = -\frac{F(-n-1)}{V_{n+1}(\gamma+n)(\gamma+n-1)}.$$

3. Cela posé, en désignant respectivement par  $\Phi$ ,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  les

trois fonctions

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z), \quad F(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma, z) \quad \text{et} \quad F(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma, z),$$

on déduit facilement, des relations données par Gauss <sup>(1)</sup>, la relation suivante :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ \gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)z + \frac{\alpha(\gamma - \alpha - 1)}{\beta - \alpha - 1} + \frac{(\gamma - \alpha)(\alpha - 1)}{\beta - \alpha + 1} \right] \Phi \\ & - \frac{\beta(\gamma - \alpha)}{\beta - \alpha + 1} \Phi_1 - \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\beta - \alpha - 1} \Phi_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si, dans cette relation, on fait

$$z = \frac{1 + ix}{2}, \quad \alpha = -n, \quad \beta = n + 1 \quad \text{et} \quad \gamma = 1 + \frac{i}{2},$$

$\Phi$ ,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  deviennent respectivement  $F(-n)$ ,  $F(-n - 1)$ ,  $F(-n + 1)$ , et l'on obtient l'équation

$$-i(2n + 1)x F(-n) - (\gamma + n)F(-n - 1) + (\gamma - n - 1)F(-n + 1) = 0.$$

Remplaçons, dans cette équation,  $F(-n)$ ,  $F(-n + 1)$  et  $F(-n - 1)$  par les valeurs proportionnelles déduites des relations (2) et  $\gamma$  par sa valeur  $1 + \frac{i}{2}$ , il viendra

$$(4) \quad V_{n+1} = -(2n + 1)x V_n + \left( n^2 + \frac{1}{4} \right) V_{n-1}.$$

4. Déduisons de (4) les valeurs de  $V_{n+1}$ ,  $V'_{n+1}$  et  $V''_{n+1}$ , et portons-les dans l'identité

$$V''_{n+1} + (2x + 1)V'_{n+1} - (n + 1)(n + 2)V_{n+1} = 0,$$

il viendra, toutes réductions faites,

$$(5) \quad 2(1 + x^2)V'_n - (2nx - 1)V_n + 2\left( n^2 + \frac{1}{4} \right)V_{n-1} = 0.$$

5. Des formules précédentes on déduit les valeurs suivantes des

(<sup>1</sup>) *Disquisitiones generales circa seriem* (Gauss Werke, t. III, p. 130).

polynômes  $V_n$  :

$$V_0 = 1, \quad V_1 = \frac{1}{2} - x, \quad V_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}x + 3x^2, \quad \dots$$

Si l'on désigne, en général, par  $S_m$  la somme des  $m^{\text{ièmes}}$  puissances des racines de l'équation  $V_n = 0$ , il est clair que l'on aura

$$S_1 = S_3 = S_5 = \dots = \frac{1}{2}$$

et

$$S_2 = S_4 = S_6 = \dots = -\frac{1}{2},$$

$m$  étant au plus égal à  $2n - 1$ .

6. De la relation (4) résulte le développement suivant de  $e^{\text{arc tang} \left(\frac{i}{x}\right)}$  en fraction continue :

$$e^{\text{arc tang} \left(\frac{i}{x}\right)} = 1 - \frac{1}{\frac{\frac{1}{2} - x + \frac{1}{4}}{-3x + \frac{4 + \frac{1}{4}}{-5x + \frac{9 + \frac{1}{4}}{-7x + \dots}}}}$$

dont la loi est évidente.

7. Les considérations qui précèdent s'appliquent, sans aucun changement, au développement en fonction de  $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)$ , quelles que soient les quantités  $a$ ,  $b$  et  $m$ .

Du reste, cette expression donne en particulier la fonction  $e^{\text{arc tang} \left(\frac{i}{x}\right)}$  quand on y fait  $a = i$ ,  $b = -i$  et  $m = -\frac{i}{2}$ .