BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur l'intégrale $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx} dz$

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 12-16
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__12_1>

Sur l'intégrale $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx}dz$; par M. Laguerre.

(Séance du 22 novembre 1878.)

1. Je suppose, dans tout ce qui suit, que n soit un nombre entier positif. On a évidemment

$$(1)\qquad \int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx}dz = -e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\Theta_n + U_n\int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}+zx}dz + V_n,$$

Θ_n désignant un polynôme entier en x et en z, U_n et V_n deux polynômes entiers en x. Si, pour mettre les variables en évidence, on écrit pour un instant $\Theta_n(z, x)$ au lieu de Θ_n, on a d'ailleurs

$$V_n = \Theta_n(0, x).$$

En dérivant l'équation précédente, on a

$$z^n = -\frac{d\Theta_n}{dz} + \Theta_n(z-x) + U_n,$$

et de cette relation, pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$, on déduit facilement les systèmes de valeurs suivants :

$$U_0 = 1,\quad \Theta_0 = 0;\quad U_1 = x,\quad \Theta_1 = 1;\quad U_2 = x^2+1,\quad \Theta_2 = z+x.$$

En général, de l'identité

$$z^{n+1} = -nz^{n-1} + z^n(z-x) + z^n x + nz^{n-1},$$

on déduit

$$(2)\qquad U_{n+1} = xU_n + nU_{n-1}$$

et

$$(3) \qquad \Theta_{n+1} = z^n + x\Theta_n + n\Theta_{n-1}.$$

2. La relation (2), jointe aux valeurs données de U_0 et de U_1, montre immédiatement que les polynômes U_n sont précisément ceux qui ont été considérés par M. Hermite, au sujet du développement de $e^{\frac{ax^2}{2} - \frac{a}{2}(x-h)^2}$ en série [1], dans le cas particulier où l'on a $a = -1$ et $h = -z$.

Ces polynômes peuvent donc être définis par l'équation

$$(4) \qquad e^{\frac{z^2}{2} + zx} = U_0 + U_1 z + \frac{U_2}{1.2} z^2 + \ldots + \frac{U_n}{1.2.3\ldots n} z^n + \ldots.$$

3. De l'égalité

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = -e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n + U_n \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

on déduit, en égalant les dérivées des deux membres par rapport à x,

$$\begin{aligned}
&-e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_{n+1} + U_{n+1} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_{n+1} \\
&= -ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \frac{d\Theta_n}{dx} + \frac{dU_n}{dx} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\
&\quad + \frac{dV_n}{dx} + U_n \int_0^z ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\
&= -ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \frac{d\Theta_n}{dx} + \left(xU_n + \frac{dU_n}{dx}\right) \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\
&\quad + \frac{dV_n}{dx} - U_n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} + U_n;
\end{aligned}$$

d'où les relations suivantes :

$$(4) \qquad \Theta_{n+1} = z\Theta_n + \frac{d\Theta_n}{dx} + U_n,$$

$$(5) \qquad U_{n+1} = xU_n + \frac{dU_n}{dx},$$

$$(6) \qquad V_{n+1} = \frac{dV_n}{dx} + U_n.$$

---

[1] *Sur un nouveau développement en série des fonctions* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 février 1864, t. LVIII).

4. On en déduit facilement ces équations

$$nU_{n-1} = \frac{dU_n}{dx}$$

et

$$(7) \qquad \frac{d^2U_n}{dx^2} + x\frac{dU_n}{dx} - nU_n = 0,$$

qui ont été données par M. Hermite.

Posons, pour abréger,

$$\Theta_n = e^{\frac{x^2}{2} - zx} H_n;$$

on aura les relations suivantes :

$$H_{n+1} = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} z^n + xH_n + nH_{n-1}$$

et

$$H_{n+1} = xH_n + \frac{dH_n}{dx} + U_n e^{-\frac{x^2}{2} + zx}$$

d'où

$$nH_{n-1} = \frac{dH_n}{dx} + e^{-\frac{x^2}{2} + zx}(U_n - z^n)$$

et

$$(8) \qquad \frac{d^2H_n}{dx^2} + x\frac{dH_n}{dx} - nH_n = e^{-\frac{x^2}{2} + zx}\left(z^{n+1} - zU_n - 2\frac{dU_n}{dx}\right).$$

Il est remarquable que, le polynôme U_n étant une solution de l'équation linéaire du second ordre

$$y'' + xy' - ny = 0,$$

la fonction

$$H_n = e^{-\frac{x^2}{2} + zx}\Theta_n$$

satisfasse à l'équation

$$y'' + xy' - ny = e^{-\frac{x^2}{2} + zx}\left(z^{n+1} - zU_n - 2\frac{dU_n}{dx}\right),$$

qui ne diffère de la précédente que par la présence du second membre.

5. Les fonctions Θ peuvent s'exprimer facilement au moyen des fonctions U.

On a, en effet,

(9) $$\Theta_{n+1} = \Sigma A_{m,n} U_m, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

où, en posant, pour abréger, $n - m = \mu$,

$$A_{m,n} = z^\mu + \frac{m+1}{1}(\mu - 1) z^{\mu-2} + \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}(\mu - 2)(\mu - 3) z^{\mu-4}$$
$$+ \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}(\mu - 3)(\mu - 4)(\mu - 5) z^{\mu-6} \ldots.$$

Le terme constant de cette expression est nul si μ est impair, et, si μ est pair, égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots\left(m+\frac{\mu}{2}\right)}{1.2.3\ldots\frac{\mu}{2}}.$$

Par suite, en faisant, dans la relation (9),

$$z = 0,$$

il vient

(10) $$V_{n+1} = U_n + (n-1) U_{n-2} + (n-2)(n-3) U_{n-4} + \ldots.$$

6. En faisant $z = \infty$ dans l'équation (1), il vient

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = U_n \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

ou encore

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} dz = U_n \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} + V_n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Posons $z - x = t$, il viendra

(11) $$\int_{-\infty}^{x} (x-t)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt = U_n \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} + V_n e^{-\frac{x^2}{2}},$$

formule où figure dans le premier membre l'intégrale multiple d'ordre n de la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ces intégrales multiples donnent donc naissance aux mêmes polynômes U_n qui, dans la théorie développée par M. Hermite, proviennent des dérivées successives de la fonction $e^{\frac{x^2}{2}}$.