BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RODET

Sur les méthodes d'approximation chez les anciens

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 159-167
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__159_1>

Sur les méthodes d'approximation chez les anciens;
par M. L. Rodet.

(Séance du 11 juillet 1879.)

J'ai besoin de faire quelques rectifications et d'ajouter quelques indications complémentaires à ma Note, présentée à la Société dans sa séance du 28 mars dernier et insérée au Tome VII du *Bulletin,* p. 98 et suiv.

C'était bien réellement la première fois que je rencontrais, ou, plus exactement, *remarquais* chez un auteur oriental le procédé d'approximation des racines carrés que j'ai découvert chez Al-Morouzi; mais je dois dire qu'il existe aussi chez d'autres auteurs de l'école arabe et que je ne l'y avais pas aperçu, parce qu'il n'y est pas donné aussi nettement que dans mon Traité persan. Je m'explique. En même temps qu'Al-Morouzi écrivait son Livre à Merv (1216), un Maure de Grenade, Ibn-al-Bannâ, enseignait les Mathématiques au Maroc (vers 1220). Dans son Traité intitulé le *Talkhys* (1), il enseigne que

$$\text{Si } r \mathrel{\substack{=\\<}} a, \quad \text{on doit faire} \quad \sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a},$$

$$\text{Si } r > a, \quad \text{»} \quad \sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1}.$$

Le moyen d'approximation en question lui était donc connu; mais il ne divisait le reste par « le double de la racine plus un » que dans le cas où ce reste était supérieur à la racine trouvée. Il n'eût donc jamais écrit, comme Baudhâyana,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \varepsilon,$$

puisqu'ici $r = 1$ est égal à la racine. Du reste, quand il avait fait usage de la formule en question, il savait trouver le deuxième terme correctif $\varepsilon_2 = \frac{r'}{2a'}$.

Au xv^e siècle, un autre Arabe d'Espagne, Al-Qalçâdi, qui commenta les œuvres d'Ibn-al-Bannâ (2), établit la même distinction suivant les grandeurs relatives de la racine trouvée et du reste; seulement les formules qu'il donne dans ce cas sont

$$\text{Pour } r \mathrel{\substack{=\\<}} a, \quad \sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a},$$

$$\text{Pour } r > a, \quad \sqrt{a^2+r} = a + \frac{r+1}{2a+2};$$

---

(1) *Voir* le *Talkhys* d'Ibn-al-Bannâ, traduit par A. Marre de Marin, dans les *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei;* Rome, 1865.

(2) *Voir* la traduction de son *Traité d'Arithmétique,* publiée par Woepcke dans les mêmes *Atti de' Nuovi Lincei;* Rome, 1859.

enfin il obtient une approximation à deux termes correctifs en faisant

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}.$$

Cette manière d'évaluer les racines carrées avait déjà fait l'objet d'une Note de Woepcke, à la suite de son exposé des notations algébriques d'Al-Qalçâdi (*Journal asiatique,* octobre-novembre 1854); mais ce procédé diffère entièrement de celui qu'a dû suivre, comme je l'ai fait voir, Baudhâyana, car il donne

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3.4},$$

et non

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}.$$

C'est ici que j'ai une erreur à rectifier : j'ai cru pouvoir conclure que, de ce que le terme correctif $-\frac{1}{3.4.34}$ « est trop grand en valeur absolue, la série arrêtée à ce terme est de nouveau approchée *par défaut* ». Cette affirmation, énoncée *a priori,* est fausse, ainsi qu'il est facile de le vérifier de bien des manières. D'abord convertie en une fraction unique, l'expression devient $\frac{577}{408}$, dont le carré est $\frac{332929}{166464}$; or le double du dénominateur est seulement 332928. Si l'on veut encore, $\frac{577}{408}$ est la huitième réduite de la fraction continue qui exprime $\sqrt{2}$; elle est donc, comme réduite paire, approchée par excès. Enfin, si l'on continue l'opération comme je l'ai indiqué dans ma Note précitée, on trouve

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34} - \frac{1}{3.4.34.1154}.$$

Puisque j'ai eu à revenir sur ces questions d'approximation, je dois signaler une méthode applicable non-seulement à l'extraction de la racine carrée, mais à la recherche de la solution numérique d'une équation quelconque et que je crois être fort ancienne, comme je le préciserai tout à l'heure. Elle est exposée et fréquemment appliquée dans un Ouvrage imprimé à Lyon, en 1520, sous le titre de *Larismethique de maistre Estienne de la Roche dict Villefranche natif de Lyon sus le Rosne* ([1]), où elle est désignée par le nom de *Rigle de mediacion entre le plus et le moins*. Elle s'appuie sur ce principe, que La Roche exprime en ces termes à la suite de sa définition des fractions, ou, comme il dit, des « nombres routz » :

« Et doit on scauoir que le milieu de tous les nombres routz est $.\frac{1}{2}.$ Duquel naissent et saillent deux progressions naturelles desquelles lune progredist par augmentation comme $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \ldots.$ Et procede in infinitum ne iamais ne pourra atteindre .1. entier. Et laultre progredist par diminution comme $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots.$ Et procede aussi in infinitum et iamais ne sera euacuee iusques a .o. quelle ne soit tousiours quelque chose.... »

Pour ne pas trop allonger cette Note, je passe à la façon dont il se sert de ses deux progressions et de sa *règle de médiation* pour extraire la racine carrée de 6. Il a d'abord fait voir que « .... la racine quarree de .6. est vng certain nombre moyen entre .2. et .3. Et pour icelluy trouuer lon doit vser de la regle de mediation entre le plus et le moins.... Et prandre pour le premier moyen $2.\frac{1}{2}.$ Qui multiplies en soy montent $.6.\frac{1}{4}.$ Qui sont $.\frac{1}{4}.$ plus de 6. Et pourtant prandrons moins en procedant par la progression de diminution et essayerons si $.2.\frac{1}{3}.$ multipliez en soy montent

([1]) Cet Ouvrage est cité et sa méthode d'approximation signalée, mais en passant, dans un très-remarquable travail : *Das Rechnen im 16 Jahrhundert* de M. Treutlein, professeur au Gymnase de Karlsruhe, paru dans les *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, premier fascicule (Leipzig, chez Teubner), 1877. La place me manque pour présenter ici une analyse de l'Ouvrage d'Estienne de la Roche; je me bornerai à en recommander vivement la lecture aux personnes qui s'intéressent à l'histoire des Mathématiques.

plus ou moins de .6. Or il est ainsi quilz montent .6. moins $\cdot\frac{5}{9}\cdot$ Maintenant nous auons trouue deux racines donc lugne fait plus et laultre moins. Il nous conuient trouue vng nombre moyen entre $2\frac{1}{2}\cdot$ et $.2\cdot\frac{1}{3}\cdot$ en adioustant numerateur auec numerateur et denominateur avec denominateur et en vient $.2\cdot\frac{2}{5}\cdot$ Ores essaye la racine en multipliant $.2\cdot\frac{2}{5}\cdot$ en soy. Et trouueras .6. moins $\cdot\frac{6}{25}\cdot$ Comment donc trouuer vng aultre nombre moyen entre $.2\cdot\frac{1}{2}\cdot$ et $.2\cdot\frac{2}{5}\cdot$ en adioustant comme dessus et lon aura $.2\cdot\frac{3}{7}\cdot$ qui multipliez en soy montent .6. moins $\cdot\frac{5}{49}\cdot$ Et par ceste maniere peult proceder.... »

Et il termine son calcul, qu'il pousse jusqu'à $2\cdot\frac{881}{1960}$, par le Tableau résumé dont voici les premiers termes seulement, les seuls dont j'aie besoin :

Par $2\frac{1}{2}$..............	$\bar{p} - \frac{1}{4}$	Par $2\frac{13}{29}$..........	$\bar{m} - \frac{5}{841}$
» $2\frac{1}{3}$..............	$\bar{m} - \frac{5}{9}$	» $2\frac{22}{49}$..........	$\bar{m} - \frac{6}{2401}$
» $2\frac{2}{5}$..............	$\bar{m} - \frac{6}{25}$	» $2\frac{31}{69}$..........	$\bar{m} - \frac{5}{4761}$
» $2\frac{3}{7}$..............	$\bar{m} - \frac{5}{49}$	» $2\frac{40}{89}$..........	$\bar{m} - \frac{2}{7921}$
» $2\frac{4}{9}$..............	$\bar{m} - \frac{2}{81}$	» $2\frac{49}{109}$..........	$\bar{p} - \frac{3}{11881}$
» $2\frac{5}{11}$..............	$\bar{p} - \frac{3}{121}$	» $2\frac{89}{198}$..........	$p - \frac{1}{39204}$
» $2\frac{9}{20}$..............	$\bar{p} - \frac{1}{400}$		

Relevons dans ce Tableau les termes pour lesquels se produit une variation dans le sens de l'approximation, en plaçant en tête la valeur 2 écrite sous la forme $2+\frac{0}{1}$; il résulte de la façon même dont nos nombres sont obtenus qu'ils ont, en réalité, la forme suivante :

Par défaut :	*Par excès :*
$2+\frac{0}{1}$,	$2+\frac{1}{2}$,
$2+\frac{4}{9}=2+\frac{0+4.1}{1+4.2}$,	$2+\frac{9}{20}=2+\frac{1+2.4}{2+2.9}$,
$2+\frac{40}{89}=2+\frac{4+4.9}{9+4.20}$,	$2+\frac{89}{198}=2+\frac{9+2.40}{2+2.89}$.

Or, si nous calculons les réduites successives de la valeur de $\sqrt{6}$ en fraction continue, nous avons

$$\sqrt{6}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ldots}}}},$$

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{22}{9}=\frac{2+4.5}{1+4.9},\quad \frac{49}{20}=\frac{5+2.22}{2+2.9},$$

$$\frac{218}{89}=\frac{22+4.49}{9+4.20},\quad \frac{485}{198}=\frac{49+2.218}{20+2.89},$$

c'est-à-dire que la « règle de mediacion entre le plus et le moins » amène *par tâtonnement* et par un procédé fort simple, l'addition terme à terme de fractions, à *calculer toutes les réduites successives de la fraction continue exprimant le nombre que l'on cherche.*

Or, ce genre de calcul par tâtonnement a tout à fait mine égyptienne. En effet, j'ai fait remarquer dans mon analyse d'un *Manuel du Calculateur,* insérée au *Bulletin* (t. VI, p. 139), que Ahmesu, l'auteur de ce Livre curieux, pour faire une division, *faisait croître* par degrés insensibles le dividende jusqu'à obtenir un nombre égal au diviseur, c'est-à-dire cherchait par tâtonnement et approximations successives quels multiples et sous-multiples du diviseur égalaient le dividende. Mais, les Grecs ayant été sur bien des points les disciples des Égyptiens, d'autre part le procédé qu'ils suivaient pour extraire les racines carrées nous étant jusqu'ici demeuré inconnu, j'ai tout naturellement été conduit à chercher si quelques indices ne nous permettraient pas de leur attribuer l'usage, soit du procédé d'Al-Morouzi et de Baudhâyana, soit de la « règle de mediacion » de La Roche. Voici quel a été le résultat de mes recherches.

Nous connaissons trois approximations de $\sqrt{3}$ ayant cours chez les Grecs.

Héron d'Alexandrie nous enseigne qu'on obtient la *cathète* d'un triangle équilatéral $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ « en retranchant du côté son dixième et son trentième ». Or

$$1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = 1 - \frac{4}{30} = \frac{26}{30} = \frac{1}{2}\,\frac{26}{15}.$$

Donc, pour Héron, $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$.

Archimède, dans son Traité Περὶ κύκλου μετρήσεως, adopte deux valeurs approchées pour $\sqrt{3}$; dans la première Partie, lorsqu'il calcule le périmètre d'un polygone circonscrit au cercle, prenant pour point de départ le triangle formé par une tangente, le diamètre au point de contact et le prolongement d'un rayon faisant avec le diamètre $\frac{1}{3}$ d'angle droit, triangle dont les côtés sont entre eux comme $1:2:\sqrt{3}$, il leur donne pour valeurs $153:306:265$, prenant ainsi $\sqrt{3} = \frac{265}{153}$ *par défaut.*

Plus loin, et pour calculer son polygone inscrit, il trace dans un demi-cercle un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le diamètre et son grand côté faisant avec ce diamètre un angle de $\frac{1}{3}$ de droit. Cette fois, il donne aux côtés les valeurs $780:1560:1351$, faisant $\sqrt{3} = \frac{1351}{780}$ *par excès.*

Si nous n'avions que la première valeur, celle de Héron, et cette dernière, nous pourrions être tentés de croire qu'elles sont obtenues par le procédé de Baudhâyana. En effet, on verra facilement que, d'après cette méthode,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{3.5.52},$$

dont les trois premiers termes font $\frac{26}{15}$, les quatre $\frac{1351}{780}$.

Mais l'emploi de la valeur intermédiaire $\frac{265}{153}$ s'oppose à cette explication, et force nous est alors d'admettre qu'Archimède avait procédé « par mediacion entre le plus et le moins ». En effet, $\frac{265}{153}$ est la neuvième réduite de la fraction continue égale à $\sqrt{3}$, dont $\frac{26}{15}$ est la sixième et $\frac{1351}{780}$ la douzième réduite, et nous venons de voir que la « rigle de mediacion » amène à trouver les réduites successives de la fraction continue. On comprend en outre pourquoi Eutocius, revérifiant les calculs d'Archimède, n'a eu d'autre moyen de démontrer l'exactitude des racines extraites que d'en faire le carré : c'était seulement ainsi qu'on arrivait à déterminer leur valeur.

Je crois de là pouvoir conclure que la *règle de médiation,* telle que je l'ai exposée d'après La Roche, a dû être pratiquée très-anciennement au moins par les Grecs, peut-être par les Égyptiens, et a dû pendant longtemps former la seule méthode d'approximation connue et pratiquée par les calculateurs anciens, et, à bien prendre, elle n'est pas plus mauvaise assurément que la méthode de substitution, à l'inconnue d'une équation, de nombres variant par fractions décimales, seul procédé que nous ayons d'obtenir une valeur approchée de la racine de cette équation si elle est de degré supérieur au second.

Je ne puis pas m'empêcher, malgré la longueur de cette Note, de citer, en terminant, les réflexions de Nesselmann (*Algebra der Griechen,* p. 110) au sujet de ces racines carrées d'Archimède :

« Donc, suivant toute vraisemblance, les Grecs n'avaient pas de méthode définie pour, étant donné dans le système numéral ordinaire un nombre qui n'est pas un carré parfait, en extraire la racine carrée irrationnelle. Pourtant, la méthode que Théon applique aux nombres exprimés en fractions sexagésimales pouvait, comme nous le verrons plus loin, s'appliquer également au système décimal des Grecs; mais l'opération, pour des nombres un peu grands, serait devenue longue et difffcile.... Il ne reste donc plus qu'une supposition possible : c'est que les anciens ont trouvé leurs racines par tâtonnement et divination, *ce que semblent indiquer en particulier les preuves par multiplication d'Eutocius.* Le nombre entier le plus approché par défaut (*die zunächst kleinere ganze Zahl*) qui répondait à la racine cherchée pouvait être facilement pris dans *une Table des carrés,* et la preuve que des Tables de ce genre, destinées à faciliter leurs calculs si pénibles, ne leur étaient pas étrangères, c'est la Table de multiplication qui se trouve dans Nicomaque. »

Je n'ai pu m'empêcher de citer cette nouvelle preuve du génie pénétrant de Nesselmann, qui fait regretter à chaque instant sa mort prématurée, en même temps que l'imperfection des documents qu'il avait à sa disposition, et la confiance dont il a fait preuve vis-à-vis d'éditeurs qui ne s'attendaient pas assurément à ce qu'on analysât, jusqu'à y chercher des détails aussi minutieux, la publication qu'ils faisaient dans un tout autre but du texte d'anciens auteurs. En ce qui concerne particulièrement les Tables de carrés destinées à alléger les calculs pénibles, l'hypothèse de Nesselmann a reçu, depuis l'époque où il écrivait (1842), une confirmation éclatante par la découverte de semblables Tables de carrés et de cubes sur les briques de la Bibliothèque de Sardanapale IV à Babylone. Si les Chaldéens possédaient ces Tables, *a fortiori* les Grecs, leurs disciples et leurs héritiers en plus d'un cas, devaient-ils les avoir imitées et étendues.