BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RODET

Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 171-174

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__171_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$; par M. L. Rodet.

(Séance du 25 juillet 1879.)

Diophante et les Arabes, particulièrement Al-Karkhi (*voir* Woepcke, *Extraits du Fakhrî;* Paris, 1863), ont traité une quantité considérable de problèmes indéterminés du premier degré; mais, comme le remarque Woepcke dans le travail précité (p. 10, note **), ils font disparaître immédiatement l'indétermination en donnant à l'une des deux variables une valeur arbitraire. Seulement ils n'ont pas dit comment ils choisissaient cette valeur arbitraire de façon à obtenir un nombre entier pour la seconde variable.

Estienne de la Roche, le mathématicien lyonnais à qui j'ai déjà emprunté la « Règle de mediacion entre le plus et le moins » (*voir* séance du 11 juillet 1879), enseigne un procédé *par routine,* qui pourrait bien encore être celui qu'ont employé les Grecs et les Arabes pour trouver cette solution « arbitraire », mais choisie. Pour ne pas allonger cette Note, je citerai seulement un exemple numérique, supprimant l'énoncé de la règle, lequel est assez peu clair, parce que La Roche complique sa question en s'attaquant au système

$$x + y + z = a,$$
$$mx + ny + pz = b$$

et qu'il lui faut alors éliminer au préalable sa troisième inconnue z. Voici, du reste, son texte tel que nous le lisons au folio 28 :

« Exemple. — *Trouues troys nombres qui adioustes ensemble fassent* .60. *Et que multipliez le premier par* .3. *le second par* 2. *et le tiers par* $\cdot\frac{1}{2}\cdot$ *les trois multiplications adioustees ensemble facent* .60. »

Pour éviter toute confusion entre ces deux nombres 60 et permettre aux lecteurs de mieux suivre l'opération, je vais indiquer entre parenthèses, après chaque nombre, sa signification algébrique, en me reportant aux deux équations ci-dessus.

« Responce. — *Multiplie* .60.(a) *par le moindre des troys nombres multiplians qui est* $\cdot\frac{1}{2}\cdot(p)$ *et auras* .30.(ap) *qui leuez de* .60.(b) *restent* .30.$(b - ap)$. *Puys soit soustrait celluy* $\cdot\frac{1}{2}$ *des aultres deux multiplians. cest ascauoir* .3.(m) *et* .2.(n). *Et restent* $.2\cdot\frac{1}{2}\cdot(m - p)$ *et* $.1\cdot\frac{1}{2}\cdot(n - p)$. *Ores de* .30.$(b - ap)$ *conuient faire deux parties desquelles lugne se puisse entierement partir par* $.2\cdot\frac{1}{2}\cdot$ *et laultre par* $.1\cdot\frac{1}{2}$, *sans quil reste aulcune chose. Mais pour euiter nombre rout faut tout reduire en* $\cdot\frac{1}{2}\cdot$ *cest ascauoir* .30. *qui est a partir. et* $.2\cdot\frac{1}{2}\cdot$ *et* $.1\cdot\frac{1}{2}\cdot$ *qui sont les parteurs. Et trouueras* .60. *pour le nombre a partir. et* .5. *et* .3. *pour les parteurs.* »

Nous voilà donc ramenés à résoudre en nombres entiers l'équation à deux inconnues

$$5x + 3y = 60.$$

« *Ores de .60. faitz deux parties telles que lugne se puisse entierement partir par .5. et laultre par .3. Et pour ce faire partis .60. par le maieur nombre qui est .5. et en vient .12. ou quotiens. Mais pour ce quil ne resteroit riens pour le moyen nombre il faut mettre moins de .12. ou quotiens affin quil reste quelque chose pour partir au moyen nombre. Or posons qu'on mette .11. ou quotiens. Et par ainsi il resteront .5. a partir qui ne se peuuent partir par .3. qui est le moyen nombre. Par quoy fauldra mettre .10. ou quotiens. et resteront .10. a partir qui pareillement ne se peuuent partir par .3. entierement. Et ainsi donc fauldra mettre .9. ou quotiens. et resteront .15. a partir qui se peuuent bien partir par .3. et en vient .5. ou quotiens....* »

Ainsi $x = 9, y = 5$, et, par suite, $z = 46$.

« *Ou aultrement de .60. qui est le nombre a partir lyeue le plus grand nombre qui est .5. tant de foiz que la reste se puisse partir entierement par .3. Et premierement lyeue .5. vgne fois de .60. et resteront .55. qui ne se peuuent partir par .3. Et pour ce lyeue deux foys .5. de .60. et resteront .50. qui pareillement ne se peuuent partir par .3. Et pour ce donc lyeues .3. foys .5. de .60. et resteront .45. qui se peuuent partir par .3. Et as ainsi diuise .60. en deux parties telles que lugne cest ascauoir .15. se peult partir entierement par .5. et laultre cest ascauoir .45. se peult partir entierement par .3.* »

L'auteur en conclut $x = 3, y = 15, z = 42$. Il ajoute :

« *Et ainsi cest rayson et les semblables qui se font par ceste regle ont plusieurs responces et tant que lon veult. Par quoy appert que ceste regle est science de petite extime.* »

Le problème n'est pas toujours possible :

« *Et sil aduenoit que la dicte reste mise a part* (c'est-à-dire $m - ap$ dans le problème à trois inconnues) *ne se peut mettre en deux parties telles que quant on lauroit parti par le nombre de la maieur partie gardée à part* $(m - p)$. *Que ce qui resteroit ne se pouroit partir entierement par le nombre de la moyenne partie aussi gardee a part* $(n - p)$. *Ce seroit signe que icelle rayson* (problème) *seroit impossible en nombres entiers.* »

La Roche donne ici pour exemple

$$x + y + z = 20,$$
$$5x + 2y + \frac{1}{2}z = 20,$$

amenant à

$$9x + 3y = 20.$$

Or ici 9 et 3 ont un facteur commun qui ne divise pas 20; le problème est donc réellement impossible.

Tout le monde n'a pas été du même avis qu'Estienne de la Roche au sujet de l'importance des *raysons* qui se traitent par ce procédé; en particulier, les mathématiciens de l'Inde ont tenu si peu cette question en *petite extime,* que Brahmagupta a donné à son Chapitre entier sur l'Algèbre le nom de l'opération par laquelle il résolvait $ax + by = 1$; mais cette réflexion n'est que secondaire. Ce sur quoi je désire appeler l'attention pour le moment, c'est la simplicité tout enfantine du procédé, qui, après tout, n'est pas beaucoup plus mauvais qu'un autre, lorsqu'il s'agit d'un problème numérique donné. Il a même l'avantage sur le procédé du plus grand commun diviseur ou des fractions continues, le seul qu'on enseigne chez nous, d'être beaucoup plus court et de conduire à des calculs moins longs. Il est même plus court encore que le procédé des congruences, fort élégant pourtant, et que je m'étonne de ne pas voir enseigner dans nos cours élémentaires : car, plus scientifique que les tâtonnements de La Roche et fournissant *toutes* les solutions de la question, cette méthode des congruences, qui a le mérite de passer par les mêmes calculs que s'il s'agissait de résoudre une équation, a l'avantage d'être très-rapide et de conduire aussi vite et aussi infailliblement au résultat que le traitement des équations auquel je viens de la comparer.