H. LEMONNIER

Calcul d'un déterminant

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 175-177

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__175_0>

Calcul d'un déterminant; par M. H. Lemonnier.

(Séance du 25 juillet 1879.)

Soit à calculer le déterminant

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace chaque terme de la dernière colonne par la somme des termes de la ligne dont il fait partie, il vient

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & 1 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & 1 \end{vmatrix},$$

ou, en retranchant successivement chaque colonne de la suivante jusqu'à l'avant-dernière,

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ . & . & . & \dots & \dots\dots & . \\ n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Faisant la même opération pour les lignes,

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & \dots & -n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & -n & n & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & . & \dots & 0 & -n \\ 0 & 0 & . & \dots & -n & n \\ 0 & 0 & . & -n & n & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ -n & n & .. & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}.$$

Soit à calculer de même

$$N_{n,p} = \begin{vmatrix} p+1 & p+2 & \dots & p+n \\ p+2 & p+3 & \dots & p+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+n & p+1 & \dots & p+n-1 \end{vmatrix}.$$

Les mêmes opérations donnent

$$N_{n,p} = \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix} p+1 & p+2 & \dots & p+n-1 & 1 \\ p+2 & p+3 & \dots & p+n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ p+n & p+1 & \dots & p+n-2 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$\left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ p+2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & . & . & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & . & . & \dots & \dots & . \\ p+n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ p+n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$\left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -n & n & 0 \\ . & . & . & . & \dots & \dots & . & . \\ 1 & 0 & -n & n & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right]n^{n-2}.$$

On déduit de là

$$\begin{vmatrix} p+q & p+2q & \dots & p+nq \\ p+2q & p+3q & \dots & p+q \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ p+nq & p+q & \dots & p+(n-1)q \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^n \left[n\frac{p}{q} + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-2}.$$