BULLETIN DE LA S. M. F.

LAISANT

Remarques sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 109-111
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__109_1>

Remarques sur les fonctions 1^x *et* $(-1)^x$; par M. LAISANT.

(Séance du 6 février 1880.)

Le plus souvent, dans l'étude de la fonction exponentielle a^x, on ne considère qu'incidemment le cas où a est négatif. On se contente de dire que, dans ce cas, la fonction est de forme bizarre, qu'elle donne lieu à une infinité de valeurs réelles, aussi rapprochées les unes des autres qu'on le voudra, et dans les intervalles desquelles restent des infinités de valeurs imaginaires.

On ajoute que, si l'on veut figurer cette fonction par une courbe, on trouve des points isolés les uns des autres et indéfiniment rapprochés.

Tout cela ne laisse pas que d'être assez obscur. Il me semble pourtant qu'on pourrait sans trop de peine éclaircir ces notions, enlever à la fonction $(-a)^x$ le caractère un peu mystérieux qu'elle présente au premier abord, et montrer qu'elle est loin d'offrir la moindre discontinuité.

A mon avis, toute la difficulté vient d'une définition insuffisante, et aussi de ce que l'on ne s'habitue pas assez facilement à l'idée du passage, sans discontinuité, des valeurs réelles aux valeurs imaginaires.

Prenons tout simplement d'abord la fonction

$$y = a^x;$$

nous pouvons l'écrire

$$y = a^x \, 1^x,$$

en appelant a^x la valeur arithmétique, essentiellement positive. Examinons maintenant le second facteur 1^x; nous pouvons écrire

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = \varepsilon^{2k\pi},$$

suivant la notation de M. Bellavitis.

De là

$$1^x = \varepsilon^{2k\pi x}.$$

La fonction, comme on le voit, est donc infinitiforme, puisqu'on peut donner à k une valeur entière quelconque. Pour définir complètement la fonction, il faut donc se donner cette valeur de k. Si alors on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$ en lui conservant des valeurs réelles, l'extrémité de 1^x, représentée à la manière accoutumée, parcourra sans discontinuité la circonférence de rayon 1 ayant son centre à l'origine.

Les valeurs de x telles que $2kx$ soit entier, mais celles-là seulement, donneront pour y des valeurs réelles. Par exemple, si nous avons choisi $k = 6$, nous aurons

$$1^x = \varepsilon^{12\pi x};$$

les valeurs $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ de x donneront des valeurs réelles; mais, de 0 à $\frac{1}{12}$, aucune valeur de x ne saurait donner pour 1^x une valeur réelle.

Quant à la fonction $y = a^x$, son extrémité parcourt évidemment une spirale logarithmique ayant son pôle à l'origine. Cette spirale coupe l'axe polaire au point C, distant du pôle d'une longueur égale à l'unité. Elle le coupe aussi à la distance $OA = a$, répondant à $x = 1$. Mais, entre ces deux points, la spirale a fait un nombre k, plus ou moins grand, de circonvolutions.

Des considérations tout à fait analogues sont applicables à la fonction

$$y = (-a)^x = a^x(-1)^x = a^x \varepsilon^{(2k+1)\pi x},$$

dont nous avons parlé en commençant. Il faut, ici encore, définir la fonction $(-1)^x$ en se donnant une fois pour toutes la valeur de k, et l'extrémité de y parcourt une spirale logarithmique. Cette courbe coupe l'axe polaire à la distance $+1$ de l'origine, répondant à $x = 0$, puis à la distance $-a$, répondant à $x = 1$. Entre ces deux points, elle fait un nombre impair, plus ou moins grand, de demi-circonvolutions.

Nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire d'insister outre mesure sur ces notions très simples, qui font bien reconnaître la nécessité de définir avec précision les fonctions avant de les soumettre au calcul.

Bornons-nous seulement aux remarques suivantes :

Lorsqu'on dit, comme on en a coutume, que 1^x est constamment égal à 1, c'est qu'on suppose implicitement $k = 0$ dans la relation de définition $1^x = \varepsilon^{2k\pi x}$. La spirale a^x se réduit alors à l'axe polaire.

Lorsqu'on dit, comme on en a coutume, que $(-1)^x$ affecte une infinité de valeurs réelles, aussi rapprochées les unes des autres que l'on voudra et séparées par des infinités de valeurs imaginaires, c'est qu'on suppose implicitement $k = \infty$ dans la relation de définition $(-1)^x = \varepsilon^{(2k+1)\pi x}$. La spirale $(-a)^x$ décrit alors une infinité de circonvolutions entre les points $+1$ et $-a$ situés sur l'axe polaire.

Ce rapprochement ne fait-il pas ressortir d'une manière frappante la contradiction dans laquelle on tombe, faute de définition suffisante?