

# BULLETIN DE LA S. M. F.

DE POLIGNAC

## **Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 8 (1880), p. 120-124

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1880\\_\\_8\\_\\_120\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__120_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie  
des ramifications; par M. DE POLIGNAC.*

(Séance du 5 mars 1880.)

I.

J'appellerai indistinctement *arbre*, *ramification*, *arborescence* une figure tracée sur un plan composé de *branches* et de *nœuds* satisfaisant à la loi suivante :

*De chaque nœud on peut, en suivant ces branches, parvenir à un nœud quelconque, mais par un seul chemin.*

Les nœuds sont les points d'intersection des branches, celles-ci des lignes droites ou courbes, mais sans points doubles, la loi qui vient d'être énoncée excluant les contours fermés.

De pareilles configurations ont été d'abord étudiées par M. C. Jordan (*Journal de Crelle*), puis indépendamment par M. Sylvester (*Educational Times*), par M. Cayley (*British Association Report*, 1875), M. Septimus Tebay, etc.

Les recherches suivantes ont pour base le mode d'existence *graphique* d'une arborescence, et, à ce propos, je ferai une re-

marque fondamentale qui, à ma connaissance, n'a pas encore été publiée.

Toute ramification peut être tracée au moyen d'un certain nombre de traits continus sans répétition ni arrêt, c'est-à-dire en partant de l'extrémité d'une branche et continuant jusqu'à ce qu'on arrive à l'extrémité d'une autre branche ou à une branche déjà parcourue. Observons que le trait doit *traverser* une ligne, quoique déjà tracée, s'il peut continuer au delà, sans cheminer le long de cette ligne. Cela posé :

REMARQUE FONDAMENTALE. — *De quelque manière que l'on trace une ramification sans répétition ni arrêt, le nombre des parcours sera toujours le même.*

Voici, je crois, le moyen le plus simple de se rendre compte de cette propriété.

En faisant une coupure à chaque branche joignant deux nœuds, on décomposera une ramification en une série d'*étoiles*, ou, si l'on veut, de *carrefours*; on la recomposera en rendant aux carrefours leurs routes communes. Pour chaque étoile, la propriété fondamentale sera évidente. On remarquera ensuite que, en réunissant deux étoiles, on perd *un trait* sur la somme des parcours relatifs à chaque étoile, et l'on en conclura

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_\nu - (\nu - 1),$$

équation dans laquelle  $N$  est le nombre des traits qui ont servi à tracer l'arborescence,  $N_1, N_2, \dots$  les nombres de traits relatifs à chaque nœud (ou étoile), et  $\nu$  le nombre des nœuds. Le second membre de l'équation étant constant, le premier le sera aussi.

Quant à  $N_1, N_2, \dots$ , on peut en donner l'expression en fonction des quantités qui caractérisent la ramification.

Appelons *ordre* d'un nœud le *nombre de ses branches*, autrement dit le *nombre des rayons de l'étoile* dans la décomposition de l'arborescence. Soient  $m_1, m_2, \dots$  les ordres des nœuds. On vérifiera immédiatement que l'on a, en se servant de la notation de Lejeune-Dirichlet pour désigner le plus grand nombre entier contenu dans une expression fractionnaire,

$$N_1 = \binom{m_1 + 1}{2}, \quad N_2 = \binom{m_2 + 2}{2}, \quad \dots$$

L'équation précédente s'écrit alors

$$(1) \quad N = \sum \left( \frac{m+1}{2} \right) - (\nu - 1).$$

J'appellerai  $N$  le nombre fondamental de la ramification.

## II.

### DIVERSES AUTRES EXPRESSIONS DU NOMBRE $N$ .

1. Soit  $e$  le nombre des extrémités libres d'une ramification. Soit, en général,  $\nu_k$  le nombre des nœuds d'ordre  $k$ ; remarquons que le minimum de  $k$  est 3; on aura

$$N = e - 1 - (\nu_4 + \nu_5) - 2(\nu_6 + \nu_7) - 3(\nu_8 + \nu_9) - 4(\nu_{10} + \nu_{11}) - \dots$$

Cette formule s'établira de proche en proche en partant d'une ramification qui n'a que des nœuds d'ordre 3 et s'élevant graduellement à la considération des ordres supérieurs. La démonstration, sans être difficile, serait un peu longue, et j'ai cru devoir me borner à en donner le résultat.

La formule peut s'écrire

$$(2) \quad N = e - 1 - \sum_2^{\mu} (\mu - 1)(\nu_{2\mu} + \nu_{2\mu+1}).$$

Observons qu'elle est indépendante du nombre des nœuds d'ordre ternaire et que, pour une ramification qui n'en a pas d'autres, on a simplement

$$(3) \quad N = e - 1.$$

La comparaison des équations (1) et (2) donne

$$e = \sum_2^{\mu} (\mu - 1)(\nu_{2\mu} + \nu_{2\mu+1}) + \sum \left( \frac{m+1}{2} \right) - \nu + 1.$$

On peut transformer cette équation en remarquant que

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_{2\mu} + \nu_{2\mu+1};$$

et, après quelques réductions faciles, on obtiendra

$$e = \sum_3^{\mu} (\mu - 2)(\nu_{2\mu} + \nu_{2\mu+1}) + \sum \left( \frac{m+1}{2} \right) - \nu_3 + 2.$$

Si la ramification est d'ordre ternaire, le premier  $\Sigma$  disparaît; de plus,  $m$  étant partout égal à 3, on a

$$\frac{m+1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad \sum \left( \frac{m+1}{2} \right) = 2\nu_3,$$

d'où

$$e = \nu_3 + 2,$$

résultat facile à vérifier directement. Aussi, par la formule (3),

$$(4) \quad N = e - 1 = \nu_3 + 1.$$

2. La formule (1), remise sous la forme

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_\nu - (\nu - 1),$$

est susceptible de la transformation suivante.

Soient

$P_1, P_2, \dots, P_p$  les nœuds d'ordre pair;

$2\mu_1, 2\mu_2, \dots, 2\mu_p$  leurs ordres respectifs.

Soient, de même, les nœuds d'ordre impair

$$I_1, I_2, \dots, I_i$$

et leurs ordres

$$2\lambda_1 + 1, 2\lambda_2 + 1, \dots, 2\lambda_i + 1.$$

Alors

$$N = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p + \lambda_1 + 1 + \dots + \lambda_i + 1 - (\nu - 1).$$

Mais

$$\nu = p + i;$$

donc

$$N = \Sigma\mu + \Sigma\lambda + i - (p + i - 1)$$

ou

$$N = \Sigma\mu + \Sigma\lambda - p + 1.$$

$i$ , nombre des nœuds d'ordre impair, a disparu de cette équation, résultat conforme au mode de description graphique donné au

début, d'après lequel il est évident que, chaque fois qu'un trait aboutit à un nœud, on peut le prolonger au delà en ajoutant une branche au nœud sans modifier le nombre des traits.

Si la ramification n'a pas de nœuds d'ordre pair, on a

$$(5) \quad N = \Sigma \lambda + 1,$$

relation dont la formule (4) est un cas particulier.

*Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme; par M. HUMBERT.*

(Séance du 19 mars 1880.)

I. M. Laguerre a montré, en développant  $\log(x - z)$ , la liaison étroite de cette question avec la théorie des fractions continues algébriques; il est facile de généraliser les résultats qu'il a obtenus; au lieu du logarithme, nous considérerons les fonctions ainsi définies.

Soient

$$\Delta(x) = Ax^2 + Bx + C = A(x - x_0)(x - x_1)$$

et une fonction  $K(x)$  satisfaisant à la relation

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{Dx + E}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{\mu_0}{x - x_0} + \frac{\mu_1}{x - x_1},$$

$$K = (x - x_0)^{\mu_0}(x - x_1)^{\mu_1}.$$

Proposons-nous de développer la fonction

$$\int \frac{\Delta(x) dx}{K(x)(x - z)}$$

suivant les puissances croissantes de  $\Delta(z)$ .

Cette intégrale indéfinie est une fonction de  $x$  et de  $z$ ; elle se développera de la manière suivante :

$$\int \frac{\Delta(x) dx}{K(x)(x - z)} = \Sigma(U_m + V_m z) \Delta^m(z).$$