BULLETIN DE LA S. M. F.

C. LE PAIGE

Sur les déterminants bordés

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 128-132

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__128_1>

Note sur les determinants bordés; par M. C. Le Paige.

(Séance du 2 avril 1880.)

Soit un déterminant symétrique du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

que l'on peut toujours regarder comme le discriminant d'une forme quadratique à n variables

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k.$$

Le déterminant symétrique que l'on obtient en bordant Δ de

p rangées et de p colonnes composées chacune de n éléments et de p zéros peut toujours se mettre sous une forme assez élégante.

Nous nous bornerons à le faire voir pour $n = 5$, $p = 3$, afin d'éviter la longueur des formules; mais on s'apercevra aisément que la méthode de démonstration est générale.

Soit

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \lambda_5 & \mu_5 & \nu_5 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit

$$F = \Sigma A_{ik} x_i x_k$$

la forme adjointe de f.

Multiplions Δ_1 par

$$\Delta^4 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{25} & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{51} & A_{52} & \cdots & A_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

nous aurons

$$2^5 \Delta_1 \Delta^4 = \begin{vmatrix} 2\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_1} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_1} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_1} \\ 0 & 2\Delta & 0 & 0 & 0 & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_2} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_2} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_2} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdots\cdot & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Delta & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_5} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_5} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_5} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Mais il est visible, par le théorème de Laplace, que ce dernier déterminant peut se mettre sous la forme de produit de deux déterminants rectangulaires.

En conséquence,

$$2^5\Delta_1\Delta_4 = 4\Delta^2 \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 \end{Vmatrix}$$

$$\times \begin{Vmatrix} \dfrac{d\mathrm{F}(\lambda)}{d\lambda_1} & \dfrac{d\mathrm{F}(\lambda)}{d\lambda_2} & \dfrac{d\mathrm{F}(\lambda)}{d\lambda_3} & \dfrac{d\mathrm{F}(\lambda)}{d\lambda_4} & \dfrac{d\mathrm{F}(\lambda)}{d\lambda_5} \\ \dfrac{d\mathrm{F}(\mu)}{d\mu_1} & \dfrac{d\mathrm{F}(\mu)}{d\mu_2} & \dfrac{d\mathrm{F}(\mu)}{d\mu_3} & \dfrac{d\mathrm{F}(\mu)}{d\mu_4} & \dfrac{d\mathrm{F}(\mu)}{d\mu_5} \\ \dfrac{d\mathrm{F}(\nu)}{d\nu_1} & \dfrac{d\mathrm{F}(\nu)}{d\nu_2} & \dfrac{d\mathrm{F}(\nu)}{d\nu_3} & \dfrac{d\mathrm{F}(\nu)}{d\nu_4} & \dfrac{d\mathrm{F}(\nu)}{d\nu_5} \end{Vmatrix}.$$

En appliquant la règle de multiplication à ces deux déterminants rectangulaires, on trouve

$$2^5\Delta_1\Delta^4 = 2^2\Delta^2 \begin{vmatrix} \sum\lambda_i\dfrac{d\mathrm{F}(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum\lambda_i\dfrac{d\mathrm{F}(\mu)}{d\mu_i} & \sum\lambda_i\dfrac{d\mathrm{F}(\nu)}{d\nu_i} \\ \sum\mu_i\dfrac{d\mathrm{F}(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum\mu_i\dfrac{d\mathrm{F}(\mu)}{d\mu_i} & \sum\mu_i\dfrac{d\mathrm{F}(\nu)}{d\nu_i} \\ \sum\nu_i\dfrac{d\mathrm{F}(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum\nu_i\dfrac{d\mathrm{F}(\mu)}{d\mu_i} & \sum\nu_i\dfrac{d\mathrm{F}(\nu)}{d\nu_i} \end{vmatrix}.$$

En général, si nous désignons par D le déterminant fonctionnel du second membre, nous aurons

$$2^n\Delta_1\Delta^{n-1} = 2^{n-p}\Delta^{n-p}\mathrm{D}$$

ou

$$2^p\Delta_1\Delta^{p-1} = \mathrm{D}.$$

Cette relation est bien connue pour $p=1$. Elle donne, par exemple, l'équation tangentielle d'une conique ou d'une surface du second degré dont on connaît l'équation en coordonnées ponctuelles.

Pour $n=4$, $p=2$, elle a été employée par Hesse dans la théorie des surfaces du second ordre ([1]).

Cependant la manière dont l'illustre géomètre démontre l'iden-

---

([1]) *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, 3te Aufl., S. 179.

tité des équations

$$D = 0, \quad \Delta_1 = 0$$

semblerait porter à croire que le théorème général ne lui était pas connu.

Cette même propriété, pour $n = 3$, $p = 2$, a été employée par Clebsch (¹).

Enfin, pour $p = 2$, n quelconque, elle résulte, comme l'a fait voir M. Salmon (²), d'une propriété générale des mineurs du second ordre d'un déterminant; mais cette démonstration n'est plus applicable dès que p surpasse 2.

Si l'on observe que

$$\delta(\lambda\mu) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \lambda_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \lambda_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1\mu_1 A_{11} + \lambda_2\mu_2 A_{12} + \ldots + \lambda_3\mu_3 A_{33}$$

$$= \lambda_1(\mu_1 A_{11} + \mu_2 A_{12}) + \mu_3 A_{13}) + \ldots,$$

on voit que

$$\delta(\lambda\mu) = \frac{1}{2}\sum \lambda_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i}.$$

Cette relation s'applique naturellement aux déterminants d'ordre quelconque.

Par suite, la formule donnée plus haut peut encore s'écrire

$$\Delta^2\delta(\lambda\mu) = \begin{vmatrix} \delta(\lambda\lambda) & \delta(\lambda\mu) & \delta(\lambda\nu) \\ \delta(\mu\lambda) & \delta(\mu\mu) & \delta(\mu\nu) \\ \delta(\nu\lambda) & \delta(\nu\mu) & \delta(\nu\nu) \end{vmatrix}.$$

et, en général,

$$\Delta^{p-1}\delta(\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varpi) = \pm[\delta(\lambda\lambda)\delta(\mu\mu)\delta(\nu\nu)\ldots\delta(\varpi\varpi)].$$

Une démonstration absolument semblable donnerait le théorème plus général

$$\Delta^{p-1}\delta\begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \ldots, & \varpi \\ \lambda', & \mu', & \ldots, & \varpi' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \delta(\lambda, \lambda') & \delta(\lambda, \mu') & \ldots & \delta(\lambda, \varpi') \\ \delta(\mu, \lambda') & \delta(\mu, \mu') & \ldots & \delta(\mu, \varpi') \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \delta(\varpi, \lambda') & \delta(\varpi, \mu') & \ldots & \delta(\varpi, \varpi') \end{vmatrix}.$$

(¹) *Vorlesungen über Geometrie*, 1ter B., 2ter Theil, S. 909.

(²) *Lessons on higher Algebra*, 3d ed., p. 29.

Sous cette dernière forme, on voit que la relation s'applique encore lorsque le déterminant Δ n'est pas symétrique.

On a donc ce théorème général :

Le produit du déterminant que l'on obtient en bordant un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre Δ, de p colonnes de n éléments $\lambda, \mu, \ldots, \varpi$ et de p rangées $\lambda', \mu', \ldots, \varpi'$, par la puissance $p-1$ de Δ, est égal à un déterminant du $p^{\text{ième}}$ ordre dont les éléments sont les formes bilinéaires obtenues en bordant Δ d'une colonne et d'une rangée prises dans les $2p$ lignes $\lambda, \mu, \ldots, \varpi$; $\lambda', \mu', \ldots, \varpi'$.

Nous pensons que cette relation, tout au moins sous sa forme générale, n'est pas connue; du moins ne l'avons-nous point rencontrée jusqu'ici.

Elle se prête à différentes applications à la théorie des formes algébriques et à la Géométrie.