Bulletin de la S. M. F.

G. Halphen

Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 18-20

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__18_1>

Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide;
par M. HALPHEN.

(Séance du 7 novembre 1879.)

Quand on considère comme un corps solide une droite portant des points de division, cinq conditions sont nécessaires pour assurer la fixité de ce corps. Soumis seulement à quatre conditions, ce corps peut se déplacer. C'est au sujet de ce déplacement que, il y a huit ans, M. Mannheim a trouvé ce beau théorème :

Si quatre points d'une droite sont assujettis à rester respecti-

vement dans quatre plans fixes, tous les points de la droite décrivent des ellipses (1).

J'ai, à la même époque, complété cette proposition en montrant que *le lieu des centres de ces ellipses est la droite unique partagée par les plans donnés en segments proportionnels respectivement à ceux de la droite mobile et les plus petits possible* (2).

Soit maintenant G cette droite, lieu des centres. Sur toute droite G′ partagée par les plans donnés en segments proportionnels respectivement à ceux de G, les segments sont plus grands que ceux qui leur correspondent sur G. Il est donc impossible de déplacer G de telle sorte que les quatre points a, b, c, d qui sont actuellement sur les plans α, β, γ, δ restent dans ces plans.

On voit ainsi qu'il existe des cas singuliers où quatre conditions suffisent à assurer l'immobilité d'une droite portant des poids de division et considérée comme un corps solide. A quel caractère géométrique peut-on reconnaître de pareils cas?

Pour répondre à cette question, considérons de nouveau le déplacement d'une droite G dont des points restent dans des plans donnés. Si l'on assujettit simplement trois points a, b, c à rester dans des plans α, β, γ, tout autre point d a pour lieu une surface qui, d'après Dupin, est un *ellipsoïde* E. Que l'on impose maintenant à ce même point d la condition de rester sur un plan δ, alors il ne pourra se mouvoir que sur l'ellipse intersection de E et de δ. Mais, si le plan δ est tangent à l'ellipsoïde E, on voit que le déplacement n'est pas possible. Or les normales aux plans α, β, γ et à l'ellipsoïde E aux points a, b, c, d sont quatre droites d'un même hyperboloïde. Donc :

Si par quatre points **a**, **b**, **c**, **d** *d'une droite* G *passent quatre plans* α, β, γ, δ *dont les quatre normales en ces quatre points appartiennent à un même hyperboloïde, il est impossible de déplacer* G *de telle sorte que les points* a, **b**, c, d *restent respectivement sur les plans* α, β, γ, δ.

Reprenons le raisonnement précédent et substituons au plan δ

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 113.
(2) *Ibid.*, p. 117.

une surface quelconque. En prenant cette surface tangente à E, nous pourrons obtenir les divers cas que l'on rencontre au sujet de l'intersection de deux surfaces tangentes entre elles en un point. Aux plans α, β, γ nous pouvons aussi substituer des surfaces quelconques et dire alors :

Si par quatre points a, b, c, d d'une droite G *passent quatre surfaces* α, β, γ, δ *dont les quatre normales en ces quatre points appartiennent à un même hyperboloïde, et qu'on assujettisse a, b, c, d à rester respectivement sur* α, β, γ, δ, *le déplacement de* G *est* généralement *impossible ou ambigu.*

Je dis *généralement,* parce que ce déplacement, dont le premier élément dépend des infiniment petits d'ordre supérieur au premier, peut, dans certains cas, cesser d'être ambigu. Par exemple, avec les données précédentes, si la surface δ' a avec E un contact d'ordre pair, la ligne d'intersection des deux surfaces peut ne présenter en *d* qu'une seule branche réelle; le déplacement, dans ce cas, n'est pas ambigu. Si le contact de δ' et de E est d'ordre impair, du premier ordre par exemple, le déplacement est impossible ou ambigu, sauf toutefois si ce contact a lieu tout le long d'une ligne. Dans ce dernier cas, le déplacement est possible et cesse d'être ambigu.

Pour le déplacement d'un solide quelconque assujetti à cinq conditions, il existe des cas singuliers analogues qui donnent lieu à l'énoncé suivant :

Si par cinq points a, b, c, d, e d'un corps solide passent quatre surfaces α, β, γ, δ, ε *dont les normales en ces points soient rencontrées par deux mêmes droites, et qu'on assujettisse a, b, c, d, e à rester respectivement sur* α, β, γ, δ, ε, *le déplacement du solide est* généralement *impossible ou ambigu.*