BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 191-196
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__191_1>

Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; par M. G. Humbert.

(Séance du 21 mai 1880.)

I. Dans une lettre à M. Fuchs, publiée dans le *Journal de Crelle*, M. Hermite a donné les résultats suivants :

Soient $n+1$ quantités $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et n polynômes entiers en x, de degré m, $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

Considérons l'expression

$$E(x) = P_1 \log \frac{x - x_1}{x - x_0} + P_2 \log \frac{x - x_2}{x - x_0} + \ldots + P_n \log \frac{x - x_n}{x - x_0}.$$

Cette expression est égale à un polynôme entier de degré $m - 1$, plus une fonction, qui, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x, commence par un terme en $\frac{1}{x}$:

$$E(x) = \Pi_{n-1}(x) + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots.$$

Les polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ renferment $(m+1)n$ coefficients ; on pourra, en disposant de ces coefficients, faire disparaître dans $E(x)$ les termes en

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{x^{(m+1)n-1}}.$$

On aura ainsi $(m+1)n-1$ équations homogènes entre les $(m+1)n$ inconnues.

Ce problème est une généralisation de celui qui conduit à la théorie des fractions continues algébriques.

M. Hermite, dans le cas cité, a montré que les polynômes $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ satisfont à une équation différentielle linéaire de degré $(n+1)$, dans laquelle le coefficient d'une dérivée, y^μ, est un polynôme de degré μ; de plus, une $(n+1)^{\text{ième}}$ solution de cette équation est la fonction

$$P_1 \log\frac{x-x_1}{x-x_0} + \cdots + P_n \log\frac{x-x_n}{x-x_0} - \Pi_{n-1}(x).$$

II. On peut donner des résultats analogues pour des fonctions plus générales que les logarithmes qu'a considérés M. Hermite.

Je définirai ces fonctions de la manière suivante.

Soient $n+1$ quantités $x_0, x_1, \ldots, x_n$, rangées, si elles sont réelles, par ordre de grandeur croissante, et $\Delta(x)$ le polynôme

$$\Delta(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Soient $G(x)$ un polynôme quelconque de degré $(n-1)$ et $K(x)$ une fonction définie par l'équation

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{G(x)}{\Delta(x)}.$$

Cela posé, les fonctions introduites au lieu des logarithmes de M. Hermite sont les suivantes :

$$z_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z}.$$

$K(z)$ est évidemment de la forme

$$K(z) = A(x - x_0)^{\mu_0}(x - x_1)^{\mu_1} \ldots (x - x_n)^{\mu_n}.$$

Les intégrales précédentes n'auront de sens que si $K(x)$ s'annule par les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la variable; ou, si

$$\mu_0 > 0, \quad \mu_1 > 0, \quad \ldots \quad \mu_n > 0.$$

Je supposerai cette condition remplie; alors les polynômes de degré m, $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$, seront déterminés par la condition que l'expression

$$P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots + P_n z_n,$$

ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, ne contienne pas de termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^{(m+1)n-1}}$.

III. Si l'on suppose

$$G(x) = \Delta'(x),$$

on a

$$K(x) = \Delta(x).$$

Nos fonctions deviennent

$$z_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dz}{x - z} = -\log \frac{x - x_1}{x - x_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dz}{x - z} = -\log \frac{x - x_n}{x - x_{n-1}}.$$

Ce ne sont pas tout à fait celles de M. Hermite, qui donne aux logarithmes de sa formule le même dénominateur $(x - x_0)$; mais la forme que j'adopte a l'avantage d'introduire des polynômes P_1, $P_2, \ldots, P_n$ qui jouissent de la propriété d'avoir toutes leurs racines réelles, et comprises respectivement entre

$$x_0 \text{ et } x_1, \quad x_1 \text{ et } x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} \text{ et } x_n,$$

pourvu, toutefois, que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ soient réels. Les polynômes de M. Hermite n'ont pas la même propriété.

On peut donner de ce théorème la démonstration suivante.

IV. De la définition des polynômes $P_1(x)$, ... on déduit, comme on le fait dans la théorie des fractions continues algébriques, les relations fondamentales,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) z dz + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z) z dz = 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) z dz + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z) z dz = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) z^{(m+1)n-2} dz + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z) z^{(m+1)n-2} dz = 0.$$

On peut résumer ces formules en une seule,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz + \ldots + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz = 0,$$

en désignant par $\Pi_{(m+1)n-2}(z)$ un polynôme quelconque en z, au plus de degré $(m+1)n-2$.

Cette propriété des polynômes $P_1(z)$, $P_2(z)$, ... suffit pour démontrer le théorème énoncé.

Je remarque d'abord que la fonction $\frac{K(x)}{\Delta(x)}$ ne peut changer de signe entre x_0 et x_1, entre x_1 et x_2, ..., x_{n-1} et x_n.

Soient maintenant

$\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$	les racines de	$P_1(x)$	comprises entre	x_0 et x_1,
$\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$	»	$P_2(x)$	»	x_1 et x_2,
....	....	....	....	....
$\alpha_n, \beta_n, \ldots, \lambda_n$	»	$P_n(x)$	»	x_{n-1} et x_n.

Chacun de ces groupes se compose d'un nombre quelconque de racines, nombre inférieur à m cependant.

Posons

$$P_1(x) = (x-\alpha_1)\ldots(x-\lambda_1)\chi_1(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_n(x) = (x-\alpha_n)\ldots(x-\lambda_n)\chi_n(x).$$

Si les fonctions $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ se réduisent à des constantes, le théorème est démontré; sinon, il y aura au moins une de ces fonctions qui sera du premier degré ou d'un degré supérieur.

Par suite, le degré du produit

$$(z-\alpha_1)(z-\beta_1)\ldots(z-\lambda_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\lambda_2)\ldots(z-\alpha_n)\ldots(z-\lambda_n)$$

ne pourra pas surpasser $mn-1$.

Or on a

$$\sum\int_{x_0}^{x_1}\frac{K(z)}{\Delta(z)}P_1(z)\Pi_{(m+1)n-2}(z)dz=0.$$

Nous pouvons prendre

$$\Pi_{(m+1)n-2}(z)=(z-\alpha_1)(z-\beta_1)\ldots(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_n)\Theta(z);$$

$\Theta(z)$ sera au moins de degré

$$(m+1)n-2-mn+1=n-1.$$

Le produit $P_1(z)\Pi_{(m+1)n-2}(z)$ sera alors de la forme

$$f_1(z)\Theta(z),$$

$f_1(z)$ ne changeant pas de signe entre x_0 et x_1; de même

$$P_n(z)\Pi_{(m+1)n-2}(z)=f_n(z)\Theta(z),$$

$f_n(z)$ ne changeant pas de signe entre x_{n-1} et x_n.

Prenons maintenant

$$\Theta(z)=(x_1-z)^{\varepsilon_1}(x_2-z)^{\varepsilon_2}\ldots(x_{n-1}-z)^{\varepsilon_{n-1}},$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ étant égaux à o ou à $+1$.

On peut évidemment les supposer tous égaux à 1, puisque $\Theta(z)$ est au moins de degré $n-1$.

L'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f_1(z)\Theta(z)dz$ a un signe indépendant des valeurs des quantités ε.

La seconde intégrale $\int_{x_1}^{x_2} f_2(z)\Theta(z)dz$ aura pour $\varepsilon_1=0$ un certain signe et pour $\varepsilon_1=1$ le signe contraire, quelles que soient, d'ailleurs, les valeurs des autres quantités $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-1}$.

Donc, en choisissant la valeur de ε_1, cette intégrale aura même signe que la première.

La troisième intégrale $\int_{x_2}^{x_3} f_3(z)\Theta(z)\,dz$ aura de même pour $\varepsilon_2 = 0$ un certain signe, pour $\varepsilon_2 = 1$ le signe contraire, quelles que soient les valeurs des ε qui suivent.

On pourra donc encore choisir ε_2 de manière à lui donner même signe qu'à la première.

En continuant ce raisonnement, on voit qu'on pourra donner aux $n-1$ intégrales qui suivent la première le même signe qu'à cette première.

Il est donc impossible que la somme de ces intégrales soit nulle.

Ainsi, en supposant que les polynômes $P_1(z) \ldots P_n(x)$ n'ont pas toutes leurs racines réelles et comprises respectivement entre x_0 et $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et x_n, on arrive à une absurdité; il faut donc conclure que cette proposition est vraie et que, par suite :

THÉORÈME.— *L'un quelconque des polynômes* P, $P_\mu(x)$, *a toutes ses racines réelles et comprises entre* $x_{\mu-1}$ *et* x_μ.