LAGUERRE

Sur la géométrie de direction

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 196-208
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__196_1>

Sur la Géométrie de direction; par M. Laguerre.

(Séances du 4 et du 18 juin 1880.)

I.

Définition des directions et des cycles.

1. Considérons une droite quelconque située dans un plan; on peut supposer qu'elle soit décrite dans un sens déterminé par un point mobile. J'appellerai *direction* une droite définie ainsi par sa position et par le sens dans lequel elle est supposée décrite.

L'angle que fait une direction avec une autre direction arbitraire est évidemment défini à un multiple près de 2π.

A chaque droite Δ du plan correspondent deux *directions opposées,* que je désignerai par les notations $+\Delta$ et $-\Delta$; D étant une direction arbitraire donnée, je désignerai par $-$D la direction opposée.

2. Les deux directions correspondant à une droite isotrope doivent être considérées comme confondues entre elles ; en d'autres termes, une direction isotrope se confond avec son opposée.

3. J'appellerai *cycle* un cercle défini non seulement par sa position, mais encore par le sens dans lequel on peut le supposer décrit par un point mobile.

A un cercle quelconque C du plan correspondent deux *cycles opposés,* que je désignerai par les notations $+C$ et $-C$; K étant un cycle arbitraire donné, je désignerai par $-K$ le cycle opposé.

4. Une direction est tangente à un cycle si la droite correspondant à la direction est tangente au cercle correspondant au cycle et si, en outre, sur l'élément commun au cercle et à la droite, le sens de la direction est le même pour le cycle et pour la direction.

Si les sens sont inverses, je dirai que la direction est une tangente *apparente* du cycle.

Un cycle doit être considéré comme l'enveloppe des directions qui lui sont tangentes. En particulier, le cycle peut se réduire à un point P, qui est l'enveloppe des directions menées par ce point ; si une direction quelconque passe par le point P, il est clair qu'il en est de même de la direction opposée.

Réciproquement, si deux directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$ sont tangentes à un cycle, ce cycle se réduit à un point situé sur la droite Δ.

5. Des définitions qui précèdent il résulte immédiatement qu'on ne peut mener à un cycle qu'une tangente parallèle à une direction donnée et que deux cycles n'ont que deux tangentes communes, par conséquent n'ont qu'un seul centre de similitude.

Trois cycles, pris deux à deux, ont trois centres de similitude qui sont en ligne droite.

On ne peut mener qu'un seul cycle tangent à trois directions données ; l'expression de *cycle inscrit dans un triangle donné* aura donc une signification parfaitement déterminée.

II.

Rapport anharmonique de quatre directions. — Faisceaux et réseaux de directions. — Faisceaux en involution. — Réseaux en involution.

6. Étant données quatre directions arbitraires A, B, C, D et étant tracé un cycle arbitraire dans le plan, menons à ce cycle des tangentes parallèles à ces directions, et soient respectivement a, b, c, d leurs points de contact. J'appellerai *rapport anharmonique* de ces quatre directions, et je désignerai par la notation R(A, B, C, D), le rapport anharmonique des quatre points a, b, c, d, lesquels sont situés sur un même cercle.

7. J'appelle *faisceau de directions* un système de directions passant par un point fixe O.

Un faisceau de directions conjuguées deux à deux est en *involution,* si le rapport anharmonique de quatre quelconques d'entre elles est égal au rapport anharmonique des directions conjuguées.

Dans un faisceau en involution, il y a deux directions qui coïncident avec leurs conjuguées : ce sont les directions doubles du faisceau. En les désignant par P et P′, et par A et A′ deux directions conjuguées quelconques, on voit que les directions P, P′ et A, A′ sont harmoniques.

Les centres des cycles tangents aux directions P et P′ décrivent une droite qui est la bissectrice de ces deux directions et que j'appellerai l'*axe* du faisceau; l'involution est déterminée quand on se donne les deux directions doubles P et P′, ou encore quand on se donne le sommet O du faisceau et un cycle tangent aux directions doubles. On peut ainsi facilement déterminer une involution, même quand les directions doubles sont imaginaires.

Soit R la droite menée par le point O perpendiculairement à l'axe du faisceau; il est aisé de voir que les deux directions $+$R et $-$R sont conjuguées : je dirai que c'est la *droite double* du faisceau.

8. Considérons un faisceau en involution ayant pour sommet le point O, P et P′ pour directions doubles, et R pour droite double. Menons par O une droite quelconque Δ, et soient D et D′ les con-

juguées des directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$: je dirai que D et D′ sont deux directions *associées* du faisceau.

Les directions associées du faisceau forment une involution ayant même axe et même droite double que l'involution donnée; ses directions doubles sont les conjuguées harmoniques des directions isotropes relativement à P et P′.

9. *Étant donnée une suite de cycles tangents à deux directions fixes quelconques* Q *et* Q′, *si, par un point* O *pris arbitrairement dans le plan, on mène des tangentes à ces cycles, ces tangentes forment un faisceau en involution.*

Les directions doubles de ce faisceau sont évidemment les tangentes menées par le point O aux deux cycles qui, passant par ce point, touchent les deux directions fixes. La droite double est la droite qui joint le point O au point de rencontre des directions Q et Q′.

10. J'appellerai *réseau de directions* un système de directions tangentes à un même cycle.

Un réseau est en involution si les points de contact des directions avec le cycle forment une involution; dans tout réseau en involution, il y a deux directions doubles. Deux directions conjuguées quelconques et les deux directions doubles sont conjuguées harmoniques.

Quatre directions forment un système harmonique lorsque, étant tangentes à un même cycle, leurs points de contact forment un système harmonique. Par suite, pour obtenir la conjuguée harmonique d'une direction B relativement à deux directions données A et A′, il suffit d'inscrire un cycle dans le triangle déterminé par les directions A, A′ et B. Joignons le point de rencontre de A et A′ avec le point de contact de B : la droite ainsi obtenue rencontre le cycle en un second point, et la direction menée tangentiellement en ce point est la conjuguée cherchée.

11. *Étant donnés une suite de cycles tangents à deux directions fixes quelconques et un cycle fixe* K, *si l'on mène les tangentes communes au cycle fixe et aux cycles variables, ces tangentes communes forment un réseau en involution.*

Les directions doubles de cette involution se détermineront en construisant les deux cycles tangents à K et aux directions fixes.

III.

Longitude de quatre directions. — Systèmes projectifs.

12. Étant données quatre directions A, B, C et D, désignons respectivement par α, β, γ et δ les intersections de A avec B, de B avec C, de C avec D et de D avec A. Cela posé, la longueur

$$\alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\delta - \delta\alpha$$

est complètement définie en valeur absolue et en signe; le segment $\alpha\beta$, étant compté en effet sur la direction B, dont le sens est déterminé, a une valeur bien déterminée, et il en est de même des autres segments.

J'appellerai *longitude* des quatre directions A, B, C, D la longueur dont je viens de parler, et je la désignerai par la notation

$$L(A, B, C, D).$$

13. *Lorsque quatre directions sont tangentes à un même cycle, leur longitude est nulle.*

Réciproquement :

Si la longitude de quatre directions est nulle, elles sont tangentes à un même cycle.

14. Deux groupes de quatre directions sont dits *projectifs* si leurs rapports anharmoniques sont égaux, ainsi que leur longitude.

Deux systèmes de directions sont dits *projectifs* si, étant prises quatre directions quelconques du premier système et les directions correspondantes du second système, les deux groupes ainsi obtenus sont projectifs.

Tous les théorèmes qui ont lieu relativement à deux systèmes de points homographiques situés sur une même ligne droite s'appliquent également à deux systèmes projectifs de directions.

15. De ce que j'ai dit plus haut (n° 13) il résulte immédiatement que, si quatre directions d'un des systèmes sont tangentes à un même cycle, les directions correspondantes dans l'autre système sont également tangentes à un même cycle.

A un cycle (ou un point) du premier système correspond donc un cycle (ou un point) dans le second système.

16. Étant donnés deux cycles C et K, on peut leur mener deux tangentes communes : j'appellerai *distance tangentielle* des deux cycles la longueur comprise entre les deux points de contact sur l'une des tangentes communes; cette distance n'est déterminée qu'en valeur absolue.

Considérons deux figures projectives ; soient C et K deux cycles appartenant à la première figure, A une de leurs tangentes communes touchant respectivement ces cycles aux points α et δ. Désignons par B une tangente à C infiniment voisine de A et passant par le point α, par D une tangente à K infiniment voisine de A et passant par le point δ, enfin par C une direction arbitraire, par β le point d'intersection de B et de C, et par γ le point d'intersection de D et de C.

La longitude des quatre directions A, B, C et D a pour expression

$$L(A,B,C,D) = \alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\delta - \delta\alpha;$$

on peut remarquer que $\beta\gamma$ est infiniment petit et qu'en négligeant les infiniment petits on a

$$\alpha\beta = \alpha\varepsilon, \quad \gamma\delta = \varepsilon\delta;$$

on a donc, en négligeant les infiniment petits,

$$L(A,B,C,D) = \alpha\varepsilon + \varepsilon\delta - \delta\alpha = 2\alpha\delta.$$

Si maintenant on remarque que, dans deux figures projectives, la longitude de quatre directions quelconques est égale à la longitude des quatre directions correspondantes, on pourra énoncer le théorème fondamental suivant :

Étant donnés, dans deux figures projectives, deux cycles C *et* K *appartenant à la première figure, soient* T *une tangente* *commune à ces deux cycles, c et k les points où cette tangente touche respectivement les cycles. Désignons par* C′ *et* K′ *les cycles correspondants dans la seconde figure, par* T′ *la tangente commune qui correspond à* T, *et par c′ et k′ les points où elle touche* C′ *et* K′.

Cela posé, la longueur ck est égale en grandeur et en signe à c′ k′. C'est ce que j'exprimerai d'une façon plus concise (mais moins nette) en disant que *la distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.*

IV.

Involution.

17. Étant donnés trois couples de directions conjuguées (A, A′), (B, B′) et (C, C′), je dirai qu'elles forment une involution si quatre quelconques de ces directions et les quatre directions conjuguées sont projectives. On peut toujours déterminer deux directions P et P′ telles que ces directions forment avec les trois couples donnés un système harmonique.

Ces directions sont les directions doubles de l'involution, et il est facile de les déterminer quand on se donne deux couples tels que (A, A′) et (B, B′) [1].

18. Un système de droites conjuguées est dit *en involution* si, étant prises quatre quelconques de ces directions, ces directions et les directions conjuguées forment un système projectif.

Il y existe alors deux directions P et P′, telles que P, P′, et deux directions conjuguées quelconques forment un système harmonique.

Une involution peut se définir au moyen des deux directions doubles P et P′, ou encore (ce qui sera préférable si ces directions sont imaginairement conjuguées) au moyen du point de rencontre

[1] Je laisse de côté la solution de ce problème et des problèmes analogues; elle ne présente aucune difficulté, mais exigerait, pour être claire, d'assez nombreuses figures. Le lecteur y suppléera facilement.

de ces directions et d'un quelconque des cycles qui leur sont tangents.

En appelant O le point de rencontre des deux directions doubles P et P′, la droite passant par ce point, et qui est le lieu des centres des cycles tangents à P et P′, sera dite l'*axe de l'involution,* la droite passant par ce même point perpendiculairement à l'axe la *droite double de l'involution.*

19. *Tous les théorèmes relatifs à un système de points en involution sur une même droite ont lieu relativement à un système de directions en involution.*

V.

Transformation par directions réciproques.

20. Soient O un point fixe et K un cycle pris arbitrairement dans le plan, P et P′ les tangentes (réelles ou imaginaires) que du point O on peut mener au cycle K; à chaque direction D du plan on peut faire correspondre une direction D′ telle que les directions D, D′ et P, P′ fassent un système harmonique.

Je désignerai cette transformation sous le nom de *transformation par directions réciproques;* il est clair, en effet, qu'à la direction D′ correspond la direction D.

Les deux droites P et P′ seront les deux directions doubles de la transformation, la droite qui joint le point O au centre de K l'axe de la transformation, et là droite R, menée par O perpendiculairement à l'axe, la droite double de la transformation.

Si une direction mobile Δ enveloppe une courbe M, la direction conjuguée (ou réciproque) Δ′ enveloppera une courbe M′ qui sera dite la *transformée* ou la *réciproque* de M.

21. Il est clair, d'après ce que j'ai dit plus haut sur l'involution, qu'un système de directions et le système transformé sont projectifs; on voit donc immédiatement que *Tout cycle a pour réciproque un cycle* (*ou un point*).

Si deux cycles C *et* K *ont pour réciproques les cycles* C′ et K′, *la distance tangentielle des deux cycles* C *et* K *est égale à la distance tangentielle des cycles* C′ *et* K′ (¹).

22. *Deux directions réciproques rencontrent la droite double* R *en deux points équidistants du centre* O *de la transformation.*

23. Étant donnée une droite quelconque Δ, à cette droite correspondent les deux directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$, auxquelles correspondent, après la transformation, deux directions D et D′ : je dirai que ces deux directions sont *associées*. Ainsi :

Deux directions sont associées si leurs réciproques sont opposées.

Un cycle se transforme généralement en un autre cycle ; il peut, dans certains cas, se transformer en un point, et je dirai alors que c'est un *cycle singulier*.

24. *Les tangentes communes à deux cycles singuliers ont pour réciproques deux directions opposées et, par suite, sont deux droites associées.*

Réciproquement :

Tout cycle tangent à deux directions associées est un cycle singulier ; un cycle est singulier, si les tangentes qu'il a en commun avec un autre cycle singulier quelconque sont des directions associées.

En particulier, le point O, centre de la transformation, est un cycle singulier ; pour qu'un cycle soit singulier, il faut donc et il suffit que les tangentes qu'on peut lui mener par le point O soient des directions associées.

25. Soient Q et Q′ les conjuguées harmoniques des directions isotropes, relativement aux droites P et P′ ; il résulte de ce qui précède que :

(¹) Cette proposition, des plus importantes dans la théorie de la transformation par directions réciproques, est analogue à la propriété suivante : *L'angle sous lequel se coupent deux cercles se conserve après une transformation par rayons vecteurs réciproques.*

Pour qu'un cycle soit singulier, il faut et il suffit que les tangentes qu'on peut lui mener du point O *constituent avec les directions* Q *et* Q' *un système harmonique.*

26. *Étant donné un cycle singulier quelconque, pour qu'un autre cycle soit singulier, il faut et il suffit que leur centre de similitude soit sur la droite* R.

Deux droites associées quelconques se coupent sur la droite R.

Chaque point de la droite R *doit être regardé comme un cycle singulier, le point correspondant étant le symétrique du point donné relativement au point* O.

27. *Soient* C *et* C' *deux cycles réciproques quelconques; désignons par* C'' *le symétrique de* C' *relativement à l'axe de la transformation: les deux cycles* C *et* C'' *ont pour axe radical la droite double* R.

28. Étant donné un cercle quelconque K, à ce cercle correspondent deux cycles opposés $+K$ et $-K$; en désignant par C et C' leurs transformés, je dirai que C et C' sont deux *cycles associés*.

29. La transformation par directions réciproques me paraît, dans l'étude de la Géométrie plane, devoir être employée avec avantage à côté de la transformation par rayons vecteurs réciproques (il est évident que cette dernière transforme un cycle en un autre cycle ou une direction).

On peut toujours effectuer la transformation de telle sorte qu'à deux directions données D et D' correspondent deux directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$; on voit qu'alors aux cycles tangents à D et à D' correspondent des points de la droite Δ.

Comme application, proposons-nous le problème suivant : *Mener un cycle tangent à trois cycles donnés.*

Construisons les tangentes communes à deux des cycles, et effectuons une transformation telle que ces deux tangentes se transforment en deux directions opposées : les deux cycles dont je viens de parler se transformeront alors en deux points, et le problème sera ramené immédiatement au suivant, qui a deux solutions :

Mener par deux points un cycle tangent à un cycle donné.

Plus généralement, on peut toujours effectuer une transformation, de telle sorte que trois cycles donnés se transforment en trois points ([1]).

VI.

Cas particuliers importants de la transformation par directions réciproques.

30. Deux cas particuliers sont particulièrement à remarquer.

En premier lieu, les deux directions doubles P et P′ peuvent être opposées; il est facile de voir alors que la réciproque d'une direction donnée est sa symétrique par rapport à la droite commune qui contient les deux directions.

Deux figures réciproques sont alors symétriques par rapport à l'axe de la transformation.

En second lieu, les deux directions doubles peuvent être des directions isotropes. En désignant, comme plus haut, par O le point de rencontre de ces directions, on voit aisément que la réciproque d'une direction donnée est sa symétrique par rapport au point O.

Deux figures réciproques sont alors symétriques par rapport au point O.

VII.

Courbes en involution. — Hypercycles.

31. Considérons une transformation par directions réciproques définie par ses deux directions doubles P et P′, et une courbe M (j'entends ici par courbe une suite de points se suivant dans un sens déterminé, en sorte qu'en chaque point de cette courbe la tangente ait une *direction déterminée*).

La courbe M sera dite en involution si, D désignant une direction quelconque tangente à cette courbe et D′ la réciproque de D, la direction D′ est elle-même tangente à M.

Les tangentes à M sont ainsi conjuguées deux à deux, de telle

---

([1]) Depuis que cette Note a été communiquée à la Société, j'ai reconnu qu'il était utile de modifier légèrement la définition précédente de la transformation par directions réciproques; je développerai ce point dans une prochaine Communication.

sorte que chaque couple de tangentes conjuguées et les deux directions fondamentales P et P′ constituent un système harmonique.

32. Étant donnée une courbe en involution, considérons une direction A prise arbitrairement dans le plan et ses conjuguées harmoniques relativement aux couples de tangentes conjuguées de la courbe : ces conjuguées enveloppent une courbe A′.

En considérant une autre direction B, on aurait une autre courbe B′, enveloppe des conjuguées harmoniques de B relativement aux couples de tangentes conjuguées de la courbe. Cela posé, si A′ est un cycle, je dis que B′ est également un cycle.

On peut, en effet, énoncer cette proposition :

Étant donné un système de directions en involution, les conjuguées harmoniques de deux directions quelconques relativement aux couples de directions conjuguées de l'involution forment deux systèmes projectifs (1).

Il résulte de là que B′ et A′ sont deux courbes projectives, ce qui démontre la proposition.

33. J'appellerai *hypercycle* une courbe en involution M jouissant de la propriété énoncée. Une telle courbe sera donc définie par les deux directions fondamentales P et P′, par une direction A et par le cycle K, qui est l'enveloppe des conjuguées harmoniques de A relativement aux tangentes conjuguées de M; je dirai que le cycle K est le *cycle polaire* de la direction A.

On voit qu'à chaque direction du plan correspond un cycle polaire, et l'on démontrera facilement les propositions suivantes :

Si K *est le cycle polaire d'une direction donnée* A *relative-*

---

(1) Comme je l'ai dit plus haut, tous les théorèmes relatifs aux systèmes de points situés en ligne droite ont leurs analogues relativement aux systèmes de directions dans un même plan; la proposition sur laquelle je m'appuie ici découle immédiatement de la proposition bien connue qui suit :

Si quatre couples de points sont en involution, les conjugués harmoniques d'un point de la droite, pris à volonté, relatifs aux quatre couples de points, ont toujours le même rapport anharmonique, quel que soit ce point. (CHASLES, *Traité des sections coniques*, p. 99).

ment à un hypercycle M, *le cycle polaire de toute tangente à* K *est tangent à la direction* A.

Les tangentes communes aux cycles polaires de deux directions opposées $+$ D *et* $-$ D *ont pour cycles polaires deux points de la droite* D.

On conclut de là qu'il y existe une infinité de directions dont les cycles polaires se réduisent à des points.

34. Il est clair qu'un hypercycle M se transforme en un hypercycle M′ par une transformation par directions réciproques; si P et P′ sont les deux directions fondamentales de M, les réciproques de P et de P′ sont les directions fondamentales de M′.

De là résulte que, si P et P′ sont réelles, on peut toujours effectuer une transformation réelle de telle sorte que les réciproques de P et P′ soient opposées, et par suite que la transformée ait un axe de symétrie.

Si, au contraire, P et P′ sont imaginairement conjuguées, on peut effectuer une transformation réelle de telle sorte que les réciproques de P et P′ soient deux directions isotropes, et alors la transformée a un centre de symétrie.