BULLETIN DE LA S. M. F.

S. KANTOR

Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 208-212

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__208_1>

Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions; par M. S. Kantor.

(Séance du 7 mai 1880.)

Étant donnée une variété (un espace) V_r à r dimensions, on peut établir entre ses éléments une relation linéaire, c'est-à-dire telle, qu'à une variété linéaire à $r-1$ dimensions, contenue dans V_r, corresponde une autre variété linéaire à $r-1$ dimensions de V_r. Soit p un élément de V_r et supposons que l'élément correspondant soit p_1. Alors à p_1 correspond par notre transformation un autre élément p_2, et à celui-ci également un autre p_3, etc. Nous appellerons p_n le $n^{\text{ième}}$ transformé de p. La transformation linéaire sera fixée, si l'on connaît $r+2$ couples d'éléments correspondants.

Prenons donc $r+1$ couples $a_1, a'_1, a_2, a'_2, \ldots, a_{r+1}, a'_{r+1}$ et un élément fixe p. La transformation ne sera déterminée que si nous faisons correspondre à p un certain élément p_1, lequel nous voulons faire varier dans toute la variété. Par ce mouvement, nous obtiendrons ∞^r diverses transformations linéaires. Selon chacune d'elles le p aura un $n^{\text{ième}}$ transformé p_n. Voici le théorème qui se rapporte au lien entre p et p_n.

Théorème. — *Les éléments p et p_n sont liés entre eux par une relation telle qu'à un élément p_1 correspond un seul p_n, à un p_n, n^r éléments p_1. Si le p_n se meut dans une variété linéaire à $n-1$ dimensions, le p se mouvra dans une variété à $n-1$ dimensions et du $n^{\text{ième}}$ degré.*

Toutes ces variétés forment un système linéaire, dans lequel se trouvent $r+1$ variétés spéciales (dégénérées), qui se composent d'une variété linéaire formée par r des éléments a'_i, et de la variété du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré à laquelle elle correspond par la transformation $p_{n-1} - p_1$.

Nous emploierons, dans ce qui suit, les dénominations indiquées ci-après. n étant un nombre entier et composé des facteurs simples $f_1, f_2, \ldots, f_n$, c'est-à-dire, de la forme $f_1^{m_1} f_2^{m_2} \ldots f^{m_\nu}$, soit

$$n - \sum \frac{n}{f_i} + \sum \frac{n}{f_i f_j} - \cdots + (-1)^\nu \frac{n}{f_1 f_2 \ldots f_\nu} = Z_1 \quad (^1),$$

où les sommes s'étendent sur tous les facteurs f et $i \gtrless j$.

Alors nous désignerons par Z_k cette fonction

$$n^k - \sum \frac{n^k}{f_i^k} + \sum \frac{n^k}{f_i^k f_j^k} - \cdots + (-1)^\nu \frac{n^k}{f_1^k f_2^k \ldots f_\nu^k} = Z_k,$$

laquelle n'est plus de la même nature que Z_1, parce qu'à ce bout il faudrait mettre $f_i \ldots$ au lieu de $f_i^k \ldots$.

Remarquons de plus que, si la transformation linéaire est périodique pour un seul élément de la variété, sans que tous les éléments d'un cycle puissent constituer une variété à $r-1$ dimensions,

---

(1) Cette fonction offre un très grand intérêt aussi au point de vue de la théorie des nombres. *Voir* la Note de l'auteur : *Wie viele cyclische Gruppen gibt es in einer quadratischen Transformation der Ebene* (*Annali di Matematica*, t. X).

elle l'est de même pour tous les éléments. Il y a $r+1$ éléments doubles. Si la transformation est périodique pour V_r, elle est périodique pour toutes les variétés à $r-1$, $r-2$, ... dimensions, qui sont déterminées respectivement par r, $r-1$, ... des points doubles. Cela posé, je dis :

Parmi toutes les transformations, il y en a Z_r qui ne réduisent l'élément p à lui-même qu'après n applications successives.

Mais ce n'est pas que toutes ces transformations *soient périodiques pour tous les éléments; il n'y en a que*

$$(n-1)(n-2)\ldots(n-r)-\sum\left(\frac{n}{f_i}-1\right)\left(\frac{n}{f_i}-2\right)\cdots\left(\frac{n}{f_i}-r\right)$$
$$+\sum\left(\frac{n}{f_if_j}-1\right)\left(\frac{n}{f_if_j}-2\right)\cdots\left(\frac{n}{f_if_j}-r\right)$$
$$+(-1)^\nu\sum\left(\frac{n}{f_1\ldots f_\nu}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{f_1\ldots f_\nu}-r\right).$$

La manière dont tous ces résultats géométriques s'appliquent à l'analyse me paraît remarquable.

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r+1}$ les paramètres arbitraires dont dépend linéairement la variété V_r, et supposons que pour l'élément a'_i tous les ξ s'annulent, sauf ξ_i.

L'équation d'une variété à $r-1$ dimensions et du premier degré qui fait partie de V_r est

$$(1) \qquad a_1\xi_1+a_2\xi_2+\ldots+a_{r+1}\xi_{r+1}.$$

Appelons

$$A_i\equiv\alpha_i^{(1)}\xi_1+\alpha_i^{(2)}\xi_2+\ldots+\alpha_i^{(r+1)}\xi_{r+1}$$

l'équation de la variété à $r-1$ dimensions qui est déterminée par les éléments $a_1, \ldots, a_2, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{r+1}$, et $X_1, X_2, \ldots, X_{r+1}$ les paramètres de p.

Alors, si la variété (1) est constituée par des éléments p_n, *la variété correspondante constituée par p_1 a pour équation*

$$(2) \qquad \frac{a_1}{L_1}\xi_1\Omega_1^{(n-2)}+\frac{a_2}{L_2}\xi_2\Omega_2^{(n-2)}+\ldots+\frac{a_{r+1}}{L_{r+1}}\xi_{r+1}\Omega_{r+1}^{(n-2)}.$$

Dans l'équation (2), L_i *désigne le résultat de la substitution des*

$X_1, X_2, \ldots, X_{r+1}$ *à la place des* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r+1}$ *dans le polynôme* A_i.

$\Omega_i^{(n-2)}$ *désigne une fonction du* $(n-2)^{ième}$ *degré qui s'obtient par le procédé suivant :*

On fait

$$\Omega_i^{(1)} = \frac{\alpha_i^{(1)}}{L_1}\xi_1 A_1 + \frac{\alpha_i^{(2)}}{L_2}\xi_2 A_2 + \ldots + \frac{\alpha_i^{(r+1)}}{L_{r+1}}\xi_{r+1} A_{r+1},$$

puis

$$\Omega_i^{(2)} = \frac{\alpha_i^{(1)}}{L_1}\xi_1 \Omega_1^{(1)} + \frac{\alpha_i^{(2)}}{L_2}\xi_2 \Omega_2^{(1)} + \ldots + \frac{\alpha_i^{(r+1)}}{L_{r+1}}\xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(1)},$$

et l'on continue jusqu'à ce que l'on trouve

$$\Omega_i^{(n-2)} = \frac{\alpha_i^{(1)}}{L_1}\xi_1 \Omega_1^{(n-3)} + \frac{\alpha_i^{(2)}}{L_2}\xi_2 \Omega_2^{(n-3)} + \ldots + \frac{\alpha_i^{(r+1)}}{L_{r+1}}\xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(n-3)}.$$

C'est donc l'opération successive exprimée par le symbole Ω qu'il faut appliquer.

Pour avoir les paramètres appartenant aux éléments p_1, qui reproduisent le p comme p_n, il faut résoudre le système des équations

$$\frac{\xi_1 \Omega_1^{(n-2)}}{L_1 X_1} = \frac{\xi_2 \Omega_2^{(n-2)}}{L_2 X_2} = \ldots = \frac{\xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(n-2)}}{L_{r+1} X_{r+1}}.$$

Les racines de ce système doivent jouir de relations singulières, parce qu'il est satisfait par le groupe des racines des équations

$$\frac{\xi_1 \Omega_1^{(f-2)}}{L_1 X_1} = \frac{\xi_2 \Omega_2^{(f-2)}}{L_2 X_2} = \ldots = \frac{\xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(f-2)}}{L_{r+1} X_{r+1}},$$

si f est facteur de n.

Il ne sera pas sans intérêt, je l'espère, d'indiquer les énoncés de ces théorèmes et de quelques autres pour l'espace à trois dimensions [1] :

Si quatre couples de points correspondants $a_1, a'_1, \ldots, a_4, a'_4$ sont donnés et si p est un point fixe, il y a n^3 transformations linéaires qui contiennent ces couples et par lesquelles le $n^{ième}$ transformé du point p devient un point donné p_n.

---

[1] *Voir* un Mémoire de l'auteur : *Ueber successive lineare Transformationen* (*Sitzungsberichte der Kaiserlischen Akademie der Wissenschaften,* Wien, 1880).

p restant fixe et p_n décrivant un plan, p_1 (c'est-à-dire le premier transformé de p) décrira une surface du $n^{\text{ième}}$ degré. Toutes ces surfaces forment un système linéaire, dont font partie les quatre surfaces composées par un plan $a'_1 a'_2 a'_3, \ldots$ et la surface du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré lui correspondant dans la transformation $p_{n-1}-p_1$.

Il y a Z_3 transformations, qui ne reproduisent p que comme p_n.

Il y a $7 Z_1$ transformations qui contiennent un tétraèdre double, dont une arête seulement porte une série cyclique de points et l'arête opposée porte une série cyclique de plans avec des cycles de n éléments.

Il y a $6Z_2 - 18Z_1$ transformations qui contiennent un tétraèdre double, dont une face porte une transformation plane cyclique avec des cycles de n points, et dont le sommet opposé porte etc.

Il y a $Z_3 - 6Z_2 + 11 Z_1$ transformations qui sont périodiques pour tout l'espace.

Les points p_1 et les points doubles des transformations ont une relation telle qu'un point p_1 détermine quatre points doubles et un point double détermine un seul point p_1. Si p_1 décrit un plan, les points doubles décrivent une surface du quatrième ordre, dont a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 sont des points doubles.