Bulletin de la S. M. F.

E. Holst

Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 52-59
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__52_1>

Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques; par M. Elling Holst.

(Séance du 19 décembre 1879.)

1. Plusieurs géomètres, particulièrement Poncelet, mais aussi Plücker, Chasles et les autres fondateurs de la Géométrie numérative, ont fait avancer la Géométrie en empruntant à l'Analyse de nouveaux *axiomes,* pour ainsi dire. Il peut être discutable si la science ainsi constituée peut encore être nommée *Géométrie pure;* mais personne ne peut nier que l'introduction de ces procédés ne forme un vrai progrès. Tandis que les principes mentionnés, empruntés à l'Analyse, se rattachent à la loi de la continuité, il est possible de faire également un usage semblable d'un autre principe de l'Algèbre, dont nous allons donner un aperçu en l'appliquant ensuite à divers exemples.

2. Le principe bien connu dont il s'agit est le suivant :

1° *Quand une fonction algébrique* F *s'annule en même temps qu'une autre fonction algébrique* f_1, *on a, pour une valeur déterminée* α_1,

$$F = f_1^{\alpha_1}\varphi_1,$$

φ_1 *étant une troisième fonction algébrique.*

2° *Quand la fonction* F *devient infinie, chaque fois qu'une autre fonction* f_2 *s'annule, on a, pour une valeur déterminée* α_2,

$$F = f_2^{-\alpha_2}\varphi_2,$$

φ_2 *étant une fonction algébrique.*

Ces deux théorèmes sont énoncés par M. Liouville.

3. Pour rendre ce principe plus fécond pour des recherches géométriques, il convient de le présenter d'une manière plus complète en partant de la proposition suivante ([1]) :

Pour vérifier que le produit de certaines fonctions algébriques

(1) $$P = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}$$

reste toujours constant, il suffit de démontrer qu'il ne peut jamais devenir nul (ou, ce qui revient au même, *qu'il ne peut jamais devenir infini*).

Comme, par hypothèse, le produit P ne peut pas être nul, il faut que, toutes les fois qu'un de ses facteurs s'annule, un au moins des autres facteurs devienne infini. Maintenant, si l'on fait approcher de zéro une quelconque des fonctions f_i, par exemple si l'on suppose

$$f_1 = \varepsilon \quad ([2]),$$

ce qui, en général, peut arriver de plusieurs manières différentes, quelques-unes des fonctions restent, en général, finies, tandis que les autres deviennent infiniment petites ou infiniment grandes de différents ordres, c'est-à-dire

$$f_i = \varepsilon^{m_i}, \quad m_i \gtreqless 0, \quad m_1 = 1;$$

mais, comme P reste fini, on doit avoir

(2) $$\Sigma m_i \alpha_i = 0.$$

En supposant successivement que les diverses fonctions f_i s'annulent, on arrive par ce même procédé à un certain nombre de relations linéaires entre les nombres α_i.

([1]) En fondant mes applications sur cette proposition, qui, selon mon exposition primitive, formait un cas spécial, j'adopte une idée qui m'a été suggérée par M. Stéphanos.

([2]) Désignons un infiniment petit du premier ordre par ε, une quantité finie quelconque par ε^0. En conséquence, un infiniment petit quelconque du $n^{\text{ième}}$ ordre peut être désigné par ε^n, et un infiniment grand du même ordre par ε^{-n}.

Inversement, si les nombres α_i satisfont à ces relations, on sera sûr que le produit P est égal à une quantité constante.

4. Lorsqu'on cherche la valeur d'une certaine fonction géométrique, il suffit de déterminer une série d'autres fonctions qui forment avec la fonction cherchée un système tel que le produit de ces fonctions élevées à des puissances convenables soit constant.

Cette remarque suffit pour faire comprendre comment ces autres fonctions doivent être choisies. Ce choix même peut être fait de plusieurs manières. Quelques exemples que nous allons exposer serviront à faire comprendre comment, par des considérations purement géométriques, on arrive à déterminer par ce procédé la fonction cherchée.

5. Exemple I. — Un exemple nous sera fourni par la recherche de la relation qui existe entre l'aire d'un triangle donné τ et l'aire du triangle T qui en est la polaire réciproque par rapport à une conique donnée. Pour cela, nous cherchons d'abord quand l'aire T s'annule. Cela n'arrive que lorsque ses sommets sont sur une même droite, c'est-à-dire lorsque les côtés de τ passent par un même point. Si l'on a donc $T = 0$, on aura $\tau = 0$, et réciproquement. Maintenant, quand T devient-il infini? *Seulement* lorsque au moins un de ses sommets est sur la droite à l'infini, c'est-à-dire lorsqu'un des côtés de τ passe par le centre O de la conique, en excluant le cas d'une parabole. On peut donc admettre pour fonctions f_i les aires des trois triangles τ_1, τ_2, τ_3 formés par le centre O et deux des sommets de τ. On s'assure facilement que les fonctions trouvées forment un système complet du genre (1), c'est-à-dire qu'on peut trouver des valeurs convenables des α_i pour lesquelles on a

$$T\tau^{\alpha_1}\tau_1^{\alpha_2}\tau_2^{\alpha_3}\tau_3^{\alpha_4} = k, \text{ une const.},$$

ou, en remarquant que $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$,

$$T\tau^{\alpha_1}(\tau_1\tau_2\tau_3)^{\alpha_2} = k.$$

T peut s'annuler de trois manières différentes, suivant que deux des angles du triangle, ou un seul, ou aucun, sont nuls. Il en est de même des aires τ, τ_1, τ_2, τ_3. Les équations (2) forment ainsi le système

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 0, \\ 1 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ 2 + \alpha_1 &= 0, \\ -1 + \alpha_2 &= 0, \\ -2 + \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0, \\ -2 + 2\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

qui est satisfait pour

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 1.$$

Pour déterminer la constante k, il suffit de choisir un triangle τ formé par deux tangentes parallèles aux deux axes $2a$ et $2b$ d'une ellipse et la corde de contact. Dans ce cas, on trouve

$$T = \tau = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \frac{ab}{2},$$

et, en conséquence,

$$k = \frac{a^2 b^2}{4}.$$

La relation cherchée est donc

$$T = \frac{a^2 b^2}{4} \frac{\tau^2}{\tau_1 \tau_2 \tau_3}.$$

Cette formule donne naissance à une série d'autres considérations. On en conclut que toutes les coniques qui transforment un triangle donné τ en un autre T, ayant une aire donnée, ont une aire (¹) constante si l'on fixe leur centre (²). Ainsi, lorsqu'une conique tourne autour de son centre, les aires transformées restent constantes. Pour avoir donc une transformation homographique qui laisse les aires invariables, on peut employer successivement deux transformations polaires par rapport à deux coniques concentriques et ayant les mêmes aires.

En supposant que τ soit un triangle conjugué par rapport à la conique, T et τ se confondent, et l'on a, en vertu de l'équation

---

(¹) L'aire d'une hyperbole étant définie $= ab\pi i$.

(²) Plus généralement, si le centre décrit une courbe du troisième ordre, ayant les côtés du triangle τ pour asymptotes d'inflexion.

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau,$$

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2} + \frac{1}{\tau_2\tau_3} + \frac{1}{\tau_3\tau_1} = \frac{4}{a^2b^2},$$

formule assez curieuse pour l'aire d'une conique en fonction des coordonnées homogènes de Lagrange-Möbius rapportées à un triangle conjugué.

6. Exemple II. — Soient données deux courbes planes φ et ψ. Appelons :

$P_{N\varphi\psi}$ le produit des normales communes aux deux courbes, chaque normale étant comptée entre les deux pieds sur les courbes ;

$P_{T\varphi\psi}$ le produit des tangentes communes aux deux courbes, chaque tangente étant comptée entre les deux points de contact ;

$P_{N\varphi\,\mathrm{as}\,\psi}$ le produit des normales communes à la courbe φ et aux asymptotes de la courbe ψ ;

$P_{N\psi\,\mathrm{as}\,\varphi}$ le produit analogue, en changeant les deux courbes.

Cela posé, on verra que ces quatre fonctions forment un système complet (1). En effet, $P_{N\varphi\psi}$ s'annule seulement en même temps que $P_{T\varphi\psi}$ et ne devient pas infini sans que $P_{N\varphi\,\mathrm{as}\,\psi}$ ou $P_{N\varphi\,\mathrm{as}\,\psi}$ devienne infini, etc. :

$$P_{N\varphi\psi}\,P_{T\varphi\psi}^{\alpha_1}\,P_{N\varphi\,\mathrm{as}\,\psi}^{\alpha_2}\,P_{N\psi\,\mathrm{as}\,\varphi}^{\alpha_3} = k,$$

$$P_{N\varphi\psi} = \varepsilon \quad \text{donne} \quad P_{T\varphi\psi} = \varepsilon \ldots\ldots\ldots \qquad 1 + \alpha_1 = 0 \quad (^1),$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{N\varphi\,\mathrm{as}\,\psi} = \varepsilon \\ \text{ou} \\ P_{N\psi\,\mathrm{as}\,\varphi} = \varepsilon \end{array}\right\} \text{donnent} \quad P_{T\varphi\psi} = \varepsilon^{-1} \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0. \end{array}\right.$$

En supposant que successivement φ et ψ tendent à toucher la droite à l'infini, on trouve

$$P_{N\psi\,\mathrm{as}\,\varphi} = \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)^{2n_\psi} \quad \text{et} \quad P_{N\varphi\psi} = \varepsilon^{-n_\psi} \ldots\ldots \qquad -1 - \alpha_3 = 0,$$

$$P_{N\varphi\,\mathrm{as}\,\psi} = \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)^{2n_\varphi} \quad \text{et} \quad P_{N\varphi\psi} = \varepsilon^{-n_\varphi} \ldots\ldots \qquad -1 - \alpha_2 = 0.$$

(1) Cette équation a lieu dans deux cas. $P_{N\varphi\psi}$ s'annule en effet : 1° si les deux courbes se touchent ; alors deux tangentes s'annulent aussi, chacune étant égale à $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ si la normale est égale à ε ; 2° si les deux courbes ont un foyer commun ; alors les normales communes qui disparaissent se confondent avec des tangentes communes.

Les n_φ, n_ψ signifient les classes des deux courbes.

En supposant encore que successivement φ et ψ tendent à passer par l'un des points cycliques, on retrouve les deux dernières relations.

Ces équations sont satisfaites par les valeurs

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1.$$

La constante k, ne pouvant pas contenir les variables, qui, dans ce cas, sont les coefficients des équations des deux courbes, sera un nombre. En supposant que l'une des courbes ait dégénéré en droites, on trouve la valeur $k = 1$. Donc la formule est

$$P_{N\varphi\psi} = P_{T\varphi\psi} P_{N\varphi \text{ as } \psi} P_{N\psi \text{ as } \varphi}.$$

Cette formule contient, comme un cas très spécial, un théorème de M. Laguerre (*Comptes rendus,* t. LX, p. 70) sur le produit des normales menées d'un point donné à une courbe donnée. J'ai démontré ce théorème en employant la méthode développée ici (*Clebsch Annalen,* t. XI, p. 341).

7. Exemple III. — *Trouver une expression pour le produit des sinus des angles que forment l'une avec l'autre les tangentes menées d'un point* P *à une courbe donnée* F (*de l'ordre m, de la classe n, et ayant d' tangentes doubles et i tangentes d'inflexion*).

Soient :

$P_{\sin\varphi}$ le produit cherché;

F_N l'expression qui, égalée à zéro, fournit l'équation ponctuelle de la courbe donnée sous la *forme normale* [1], c'est-à-dire que F_N est égal au produit des normales de P, divisé par le produit des distances focales de P.

Exemple IV. — *Trouver une expression pour le produit des segments interceptés sur une droite* D *par une courbe donnée* F (*de l'ordre m, de la classe n, et ayant d points doubles et r points de rebroussement*).

Soient :

P_s le produit cherché;

F_M l'expression qui, égalée à zéro, fournit l'équation tangentielle de la courbe sous une *forme normale,* c'est-à-dire que F_M est égal au produit des normales communes de F et de D.

[1] La Note citée de *Clebsch Annalen*.

Soient encore :

P_{td} le produit des distances de P à toutes les tangentes doubles de F;

P_{ti} le produit des distances de P à toutes les tangentes d'inflexion;

P_B le produit des distances focales de P.

Soient aussi :

P_{pd} le produit des distances de D à tous les points doubles de F;

P_{pr} le produit des distances de D à tous les points de rebroussement;

$P_{\sin\psi}$ le produit des sinus des angles que forme la droite D avec les asymptotes.

Ces quantités forment deux systèmes complets :

$$P_{\sin\varphi} F_N^{\alpha_1} P_{td}^{\alpha_2} P_{ti}^{\alpha_3} P_B^{\alpha_4}, \qquad P_s F_M^{\alpha_1} P_{pd}^{\alpha_2} P_{pr}^{\alpha_3} P_{\sin\psi}^{\alpha_4}.$$

En supposant successivement que :

1° le point P devienne infiniment voisin de la courbe $F_N = \varepsilon$;

2° le point P devienne infiniment voisin d'une tangente double $P_{td} = \varepsilon$;

3° le point P devienne infiniment voisin d'une tangente d'inflexion $P_{ti} = \varepsilon$;

4° le point P devienne infiniment voisin d'une tangente focale $P_B = \varepsilon$;

5° le point P s'éloigne à l'infini,

1° la droite D tende à devenir tangente de la courbe $F_M = \varepsilon$;

2° la droite D tende à passer par un point double $P_{pd} = \varepsilon$;

3° la droite D tende à passer par un point de rebroussement $P_{pr} = \varepsilon$;

4° la droite D tende à coïncider avec une asymptote $P_{\sin\psi} = \varepsilon$;

5° la droite D tende à passer par un des points cycliques,

on trouve, toujours par des considérations purement géométriques,

1° $P_{\sin\varphi} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$;

2° $P_{\sin\varphi} = \varepsilon$;

3° $P_{\sin\varphi} = \varepsilon^{\frac{3}{2}}$;

4° $P_{\sin\varphi} = \varepsilon^{-(n-1)}$;

5° $$\left\{\begin{aligned} P_{\sin\varphi} &= \varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}, \\ F_N &= \varepsilon^{-m}, \\ P_{td} &= \varepsilon^{-d'}, \\ P_{ti} &= \varepsilon^{-t}, \\ P_B &= \varepsilon^{-n}. \end{aligned}\right.$$

1° $P_s = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$;

2° $P_s = \varepsilon$;

3° $P_s = \varepsilon^{\frac{3}{2}}$;

4° $P_s = \varepsilon^{-(m-1)}$;

5° $$\left\{\begin{aligned} P_s &= \varepsilon^{\frac{m(m-1)}{2}}, \\ F_M &= \varepsilon^{-n}, \\ P_{pd} &= \varepsilon^{-d}, \\ P_{pr} &= \varepsilon^{-r}, \\ P_{\sin\psi} &= \varepsilon^{-m}. \end{aligned}\right.$$

En conséquence :

1° $\frac{1}{2} + \alpha_1 = 0$;
2° $1 + \alpha_2 = 0$;
3° $\frac{3}{2} + \alpha_3 = 0$;
4° $-(n-1) + \alpha_4 = 0$;
5° $$\begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{2} - m\alpha_1 \\ \quad - d'\alpha_2 - i\alpha_3 - n\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

1° $\frac{1}{2} + \alpha_1 = 0$;
2° $1 + \alpha_2 = 0$;
3° $\frac{3}{2} + \alpha_3 = 0$;
4° $-(m-1) + \alpha_4 = 0$;
5° $$\begin{cases} \dfrac{m(m-1)}{2} - n\alpha_1 \\ \quad - d\alpha_2 - r\alpha_3 - m\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Toutes ces équations sont satisfaites par les valeurs

$$\alpha_1 = -\tfrac{1}{2},\quad \alpha_2 = -1,\quad \alpha_3 = -\tfrac{3}{2},\quad \alpha_4 = n - 1.$$

$$\alpha_1 = -\tfrac{1}{2},\quad \alpha_2 = -1,\quad \alpha_3 = -\tfrac{3}{2},\quad \alpha_4 = m - 1.$$

On a ainsi les formules

$$P^2_{\sin\varphi} P^{2(n-1)}_{B} = k F_N P^2_{td} P^3_{ti},$$

Pour déterminer la constante k, il suffit de supposer successivement le point P confondu avec les points I et J. Des deux formules ainsi obtenues on conclut

$$k = P^2_{B_i B_k}.$$

$B_i B_k$ désigne la distance entre deux quelconques des foyers.

$$P^2_{s} P^{2(m-1)}_{\sin\psi} = k' F_M P^2_{pd} P^3_{pr}.$$

Pour déterminer la constante k', il suffit de supposer la droite D confondue avec la droite à l'infini. Cela posé, on trouve

$$k' = P^2_{\sin \Psi_i}.$$

Ψ_i désigne l'angle entre deux quelconques des asymptotes de la courbe.

Les formules sont alors

$$P^2_{\sin\varphi} P^{2(n-1)}_{B} = P^2_{B_i B_k} F_N P^2_{td} P^3_{ti},$$

$$P^2_{s} P^{2(m-1)}_{\sin\psi} = P^2_{\sin\Psi_i} F_M P^2_{pd} P^3_{pr}.$$

Nous pensons que ces quelques exemples suffiront pour faire saisir l'esprit général de la méthode et spécialement son application à l'étude des propriétés métriques de l'étendue.