Bulletin de la S. M. F.

M. Laquière

Rectification d'une formule de probabilité

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 74-79
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__74_1>

Rectification d'une formule de probabilité; par M. LAQUIÈRE.

(Séance du 20 février 1880.)

Dans le problème : *Une droite l est divisée en m segments. Quelle est la probabilité pour que n d'entre eux soient d'une longueur plus grande qu'une longueur donnée a?* M. Jordan établit que la probabilité que les n premiers segments soient tous plus grands que a, désignée par X_n, est exprimée par

$$X_n = \left(\frac{l - na}{l}\right)^{m-1},$$

si $na < l$. Cherchant ensuite la probabilité que n segments fixés d'avance par une personne étrangère, à l'insu de celui qui fait la section, soient tous $> a$, il donne pour cette probabilité C_n la formule

$$C_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{l - na}{l}\right)^{m-1},$$

c'est-à-dire

$$C_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} X_n.$$

Il me paraît y avoir ici une confusion. Le nombre C_n ainsi déterminé exprime le nombre probable des groupes qu'il est possible de former avec les segments supérieurs à a. La probabilité que n segments choisis d'avance, ou déterminés, ou pris au hasard, ce qui revient toujours au même, seront tous plus grands que a, est absolument indépendante de l'ordre des segments choisis, et par suite égale à X_n. Ce nombre est la probabilité commune à tous les groupes de m segments distingués par le choix particulier des segments mis à part; le nombre de groupes formés égal à $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$ disparaît dans la probabilité comme facteur commun aux deux termes de la fraction.

Il est, du reste, évident que le nombre donné dans la Note [1] de M. C. Jordan est trop fort, comme plus grand que l'unité, toutes les fois que le rapport $\frac{m}{n}$ sera suffisamment grand et $\frac{na}{l}$ suffisamment petit. Exemple : si $na < \frac{l}{4}$, $m = 2n$,

$$C_n > 2^n\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-1} > 2^n\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} = \left(\frac{9}{8}\right)^n > 1.$$

La probabilité C_n pour que n segments déterminés sur les m soient

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 256.

tous plus grands que a n'est autre que

$$C_n = X_n = \left(\frac{l - na}{l}\right)^{m-1}.$$

Soient dès lors, avec M. Jordan,

A_r la probabilité qu'il y ait *juste* r segments plus grands que a parmi les n suivant lesquels a été partagée la tige, les points de division étant supposés tous également probables et indépendants les uns des autres;

B_r la probabilité qu'il y en a *au moins* r.

L'expression de A_r se déduit sans difficulté de celle de C_r, et, par suite, on obtiendra celle de B_r, dont la valeur évidente est

$$B_r = A_r + A_{r+1} + \ldots + A_{r+k} + \ldots + A_m,$$

en observant de prendre A_{r+k}, B_{r+k}, C_{r+k} nuls dès que $r+k$ est supérieur à $\frac{l}{a}$.

Calcul de la probabilité A_r en fonction de C_r.

Les r segments déterminés d'avance et tous plus grands que a proviennent d'un nombre $r+k$ de tels segments existant réellement sur les m, le nombre k étant compris entre les limites extrêmes o et $m-r$. Pour chaque valeur de k, la probabilité simple de r segments déterminés plus grands que a étant

$$\frac{(r+k)(r+k-1)\ldots(k+2)(k+1)}{m(m-1)\ldots(m-r+1)},$$

la probabilité qu'il existe r segments déterminés plus grands que a, provenant de segments de telle nature existant au nombre de $r+k$, est donc la probabilité composée

$$\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+r)}{m(m-1)\ldots(m-r+1)} A_{r+k},$$

d'où

$$(1) \qquad C_r = \sum \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+r)}{m(m-1)\ldots(m-r+1)} A_{r+k},$$

somme dans laquelle k prend toutes les valeurs entières de 0 à $m-r$.

Pour avoir la valeur de A_r en fonction des quantités déjà connues et d'expression simple, telles que C_r, écrivons d'abord la série de toutes les valeurs de ces dernières en fonction des premières [formule (1)] pour les valeurs $r, r+1, \ldots, r+k, \ldots$ successives entières de r, série qui s'arrête d'elle-même aux termes rendus nuls par l'inégalité $r+k > \frac{l}{a}$. Supposons écrites les valeurs ainsi développées de

$$C_r, \; C_{r+1}, \; C_{r+2}, \; \ldots, \; C_{r+k}, \; \ldots .$$

Multiplions les deux membres des égalités de la série complète de ces valeurs par les facteurs, alternativement positifs et négatifs, compris entre les barres

$$+1 \left| -\frac{m-r}{1} \right| + \frac{(m-r)(m-r-1)}{1.2} \left| \ldots \right| \pm \frac{(m-r)\ldots(m-r-k+1)}{1.2.3\ldots k} \left| \ldots \right.$$

Faisons la somme des produits membre à membre; il en résultera l'élimination de tous les termes du second membre en dehors de A_r, dont la valeur est, par suite, égale à

$$\begin{aligned}
&\frac{1.2.3\ldots r}{m(m-1)\ldots(m-r+1)} A_r \\
&= C_r - \frac{m-r}{1} C_{r+1} + \frac{(m-r)(m-r-1)}{1.2} C_{r+2} \\
&\quad - \frac{(m-r)\ldots(m-r-2)}{1.2.3} C_{r+3} + \ldots \\
&\quad \pm \frac{(m-r)(m-r-1)\ldots(m-r-k+1)}{1.2.3\ldots k} C_{r+k} \mp \ldots .
\end{aligned}$$

On voit, en effet, que le coefficient dans le second membre (contenant les A) d'un terme quelconque A_{r+k}, en dehors du premier, est dans cette somme formé des termes successifs du développement du binôme $(1-1)^k$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
A_r = &\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2.3\ldots r} C_r - \frac{m(m-1)\ldots(m-r)}{1.2.3\ldots r.1} C_{r+1} + \ldots \\
&\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-r-k+1)}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots k} C_{r+k} \mp \ldots .
\end{aligned}$$

Ajoutant ensuite les valeurs ainsi développées de A_r, A_{r+1}, ..., A_{r+k}, ..., on trouve, pour valeur du coefficient de C_{r+k} dans le développement de $B_r = \Sigma A_{r+h}$ $(0 \leqq h \leqq m - r)$,

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-r-k+1)}{1.2.3\ldots(r+k)}\left[1 - \frac{r+k}{1} + \frac{(r+k)(r+k-1)}{1.2} - \ldots \pm \frac{(r+k)(r+k-1)\ldots(r+2)(r+1)}{1.2.3\ldots k}\right],$$

ou, d'après les propriétés des nombres figurés,

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-r-k+1)}{1.2.3\ldots(r+k)} \frac{r(r+1)\ldots(r+k-1)}{1.2.3\ldots k}.$$

Ce développement s'écrira donc

$$\begin{aligned} B_r = {} & \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2.3\ldots r} C_r - \frac{m(m-1)\ldots(m-r)}{1.2.3\ldots(r+1)} \frac{r}{1} C_{r+1} \\ & - \frac{m(m-1)\ldots(m-r-1)}{1.2.3\ldots(r+2)} \frac{r(r+1)}{1.2} C_{r+2} + \ldots \\ & \pm \frac{r(r+1)\ldots(m-1)}{1.2.3\ldots(m-r)} C_m. \end{aligned}$$

Les valeurs de A_r et de B_r ainsi développées sont, du reste, identiques à celles que l'on obtiendrait en remplaçant dans les formules de la Note de M. Jordan les valeurs C_r, C_{r+1}, C_{r+2}, ... par $\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2.3\ldots r} C_r$, ..., qui leur doivent être substituées en vertu de la rectification qui fait l'objet principal de notre observation. Il y a lieu de signaler toutefois une erreur d'écriture dans le dernier terme du développement de B_r (bas de la page 256), qui contient un facteur de trop aux deux membres de la fraction et qui, pour se conformer à la loi de formation des termes, devrait être

$$\pm \frac{r(r+1)\ldots(m-1)}{1.2.3\ldots(m-r)}$$

au lieu de

$$\pm \frac{r(r+1)\ldots m}{1.2\ldots m-r}$$

que porte le *Bulletin*.

Les formules de M. Jordan sont donc algébriquement exactes en faisant disparaître les symboles tels que C et les remplaçant par les valeurs qu'en donne l'auteur quelques lignes plus haut, et dont l'inexactitude met les dernières expressions développées en désaccord avec les définitions données, et d'ailleurs seules commodes, des symboles A, B, C.

N. B. — N'ayant point la faculté de lire les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* nous n'avons pu connaître la marche suivie par M. Jordan pour arriver aux expressions développées de B et A. Il semble, d'après les termes de l'article précité, que, dans le travail auquel se reporte l'auteur, la détermination de B ait dû précéder celle de A. Comme on l'a vu, nous obtenons, sans calculs en quelque sorte et sans le moindre effort de raisonnement, le développement de A par ses relations directes avec C et celui de B au moyen de A. Ayant cherché à obtenir une relation directe entre C et B, nous avons immédiatement abandonné cette marche pour celle qui a été exposée ci-dessus, la première nous paraissant se présenter dans des conditions de raisonnement beaucoup moins simples et de calcul plus compliquées.