BULLETIN DE LA S. M. F.

CAMILLE JORDAN

Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 113-115
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__113_0>

Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples;
par M. Camille Jordan.

(Séance du 17 juin 1881.)

Eisenstein a établi (*Journal de Crelle,* t. 35) que la série

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2)^\mu},$$

où $v_1, \ldots, v_n$ sont des fonctions linéaires des variables entières $x_1, \ldots, x_n$ par rapport auxquelles on fait la sommation, est convergente ou divergente suivant qu'on a

$$2\mu > n \quad \text{ou} \quad 2\mu \leqq n$$

(pourvu que le déterminant des fonctions v ne soit pas nul).

La démonstration de cet illustre auteur peut être simplifiée et généralisée comme il suit :

Considérons d'abord la série

$$S=\sum\sum\cdots\frac{1}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^\mu},$$

où $x_1, \ldots, x_n$ prennent tous les systèmes de valeurs possibles, le système $0, 0, \ldots$ excepté.

Soit y un entier quelconque. Le nombre des systèmes de valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ non supérieures à y en valeur absolue est évidemment $(2y+1)^n-1$. Celui des systèmes de valeurs où l'une au moins des variables est égale à y, les autres ne surpassant pas y, sera

$$(2y+1)^n-1-[(2y-1)^n-1]=n.2^{n-1}y^{n-1}+\ldots.$$

Chacun des termes de la série S correspondants à ces systèmes de valeurs étant évidemment compris entre $\frac{1}{y^{2\mu}}$ et $\frac{1}{(ny^2)^\mu}$, leur somme sera comprise entre

$$\frac{n.2^{n-1}y^{n-1}+\ldots}{y^{2\mu}} \quad \text{et} \quad \frac{n.2^{n-1}y^{n-1}+\ldots}{n^\mu y^{2\mu}}.$$

La série S sera donc comprise entre T et $\frac{1}{n^\mu}$T, T désignant la somme

$$\sum_{y=1}^{y=\infty} \frac{n.2^{n-1}y^{n-1}+\ldots}{y^{2\mu}}.$$

Or, pour que T soit convergent, il faut et il suffit, comme on sait, qu'on ait

$$2\mu > n.$$

Soit maintenant F une fonction homogène et de degré k des variables $x_1, \ldots, x_n$, laquelle reste finie et positive pour tous les systèmes de valeurs réelles de ces variables; soit Φ une autre fonction de ces variables, de degré inférieur à αk. La série

$$U = \sum\sum\cdots\frac{1}{F^\alpha + \Phi}$$

sera convergente ou divergente (abstraction faite des termes qui deviendraient infinis) suivant qu'on aura

$$(1) \qquad \alpha k > n \quad \text{ou} \quad \alpha k \overline{\underset{<}{=}} n.$$

Soient, en effet, M et m le maximum et le minimum de F pour tous les systèmes de valeurs réelles des variables qui satisfont à la relation

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

La fonction $\frac{F^\alpha}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{\alpha k}{2}}}$, ne dépendant que des rapports des variables, restera constamment comprise entre M^α et m^α. D'autre part, pour des valeurs suffisamment grandes des variables, la fonction $\frac{\Phi}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{\alpha k}{2}}}$ tendra vers zéro, car elle est inférieure à $\frac{\Phi}{x_\rho^{\alpha k}}$, x_ρ désignant la plus grande des variables; or il est clair que cette dernière quantité tend vers zéro, son dénominateur étant d'un degré plus élevé que son numérateur.

Donc, pour des valeurs suffisamment grandes des variables, le rapport des termes de la série U à ceux de la série

$$V = \sum\sum \cdots \frac{1}{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{\alpha k}{2}}}$$

sera compris entre les deux quantités positives $\frac{1}{M^\alpha + \varepsilon}$ et $\frac{1}{m^\alpha + \varepsilon}$, ε étant aussi petit que l'on voudra. Donc, pour que U soit convergente, il faut et il suffit que V le soit, ce qui donne la condition (1).