BULLETIN DE LA S. M. F.

N. SONINE

Note sur une formule de Gauss

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 162-166
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__162_1>

Note sur une formule de Gauss; par M. N. Sonine.

(Séance du 15 juillet 1881.)

La propriété fondamentale et la plus simple de la fonction $\Gamma(x)$, définie pour des valeurs à partie réelle positive de la variable x par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

consiste dans l'équation aux différences finies

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

On en tire aisément le théorème célèbre de Gauss.

En effet, en désignant par n un nombre entier positif, on aura

$$\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{n}+1\right) = \frac{x}{n}\Gamma\left(\frac{x}{n}\right),$$

et, si l'on élimine x entre ces deux équations, on obtient

$$(1) \qquad \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = n\frac{\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)}.$$

Mais le rapport de l'expression $\frac{F(x+n)}{F(x)}$ se réduit aisément au produit des rapports dans lesquels les valeurs de la variable ne diffèrent que de l'unité, à savoir

$$\frac{F(x+n)}{F(x)} = \frac{F(x+n)}{F(x+n-1)}\frac{F(x+n-1)}{F(x+n-2)}\cdots\frac{F(x+2)}{F(x+1)}\frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Cette transformation, appliquée au second membre de l'équation (1), conduit au résultat suivant

$$\frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} = n\,\frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right)}{\Gamma(x+1)},$$

ou, en posant

$$(2)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} = \varphi_n(x),$$

$$\varphi_n(x) = n\,\varphi_n(x+1).$$

Cette dernière équation admet pour solution particulière $\varphi_n(x) = A^x$ ou $A = \frac{1}{n}$, et la solution générale sera

$$\varphi_n(x) = n^{-x}\theta_n(x),$$

$\theta_n(x)$ étant une fonction périodique telle que $\theta_n(x) = \theta_n(x+1)$. D'après cela, l'équation (2) devient

$$(3)\qquad \theta_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)}\,n^x.$$

Remplaçons-y n par le produit mn de deux nombres entiers, ce qui fournit

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_{mn}(x) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{x}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{mn}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+m-1}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+m}{mn}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{\Gamma(x)}\,m^x n^x,\end{aligned}\right.$$

et composons le produit

$$\theta_n\left(\frac{x}{m}\right)\theta_n\left(\frac{x+1}{m}\right)\cdots\theta_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{x}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{mn}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+m}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+m-1}{m}\right)}\,n^{x+\frac{m-1}{2}},$$

dans lequel le numérateur du second membre est égal à

$$\theta_{mn}(x)\Gamma(x)m^{-x}n^{-x},$$

en vertu de l'équation (4), tandis que le dénominateur s'exprime par

$$\theta_m(x)\Gamma(x)m^{-x},$$

en vertu de l'équation (3). En substituant ces valeurs, on aura

$$\theta_m(x)\theta_n\left(\frac{x}{m}\right)\theta_n\left(\frac{x+1}{m}\right)\cdots\theta_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)=\theta_{mn}(x)n^{\frac{m-1}{2}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\theta_m(x)}{\sqrt{m}}\,\frac{\theta_n\left(\frac{x}{m}\right)}{\sqrt{n}}\,\frac{\theta_n\left(\frac{x+1}{m}\right)}{\sqrt{n}}\cdots\frac{\theta_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)}{\sqrt{n}}=\frac{\theta_{mn}(x)}{\sqrt{mn}},$$

et si l'on désigne $\frac{\theta_n(x)}{\sqrt{n}}$ par $\sigma_n(x)$, on trouve définitivement

$$\sigma_m(x)=\frac{\sigma_{mn}(x)}{\sigma_n\left(\frac{x}{m}\right)\sigma_n\left(\frac{x+1}{m}\right)\cdots\sigma_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)},\tag{5}$$

où naturellement $\sigma_n(x)=\sigma_n(x+1)$. Pour $n=\infty$, la fonction $\sigma_n(x)$ ne pourra dépendre que de x, et, en posant $\lim\sigma_n(x)=\frac{1}{f(x)}$, l'équation (5) fournira, pour $n=\infty$,

$$\sigma_m(x)=\frac{f\left(\frac{x}{m}\right)f\left(\frac{x+1}{m}\right)\cdots f\left(\frac{x+m-1}{m}\right)}{f(x)},\tag{6}$$

où $f(x)=f(x+1)$. On s'assure aisément que cette expression de $\sigma_m(x)$ satisfait identiquement à l'équation (5), pour chaque valeur de m et de n. C'est donc l'expression la plus générale de la fonction $\sigma_m(x)$.

D'après cela, l'équation (3) pourra prendre la forme

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)$$
$$=n^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x)\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)}.$$

Mais le premier membre ne devient assurément infini pour aucune valeur de x, à partie réelle positive et finie; quant au second membre, le facteur $n^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x)$ possède la même propriété; donc, ou le second facteur

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)},$$

qui est une fonction périodique, ne doit pas non plus devenir infini, et par conséquent ne sera qu'une constante a_n, indépendante de x; ou les infinis de ce facteur doivent coïncider *tous* avec les zéros de $\Gamma(x)$, de sorte que le produit de ce facteur par $\Gamma(x)$ reste toujours fini : mais alors les infinis dont il s'agit, et la manière dont se comporte la fonction périodique dans ces infinis, seraient indépendants de n; ce qui est évidemment inadmissible. On doit donc admettre définitivement

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)}=a_n.$$

On tire de là, en remplaçant x successivement par $\frac{x}{m}$, $\frac{x+1}{m}$, ..., $\frac{x+m-1}{m}$ et faisant la multiplication des résultats,

$$\frac{f\left(\frac{x}{mn}\right)f\left(\frac{x+1}{mn}\right)\cdots f\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{f\left(\frac{x}{m}\right)f\left(\frac{x+1}{m}\right)\cdots f\left(\frac{x+m-1}{m}\right)}=a_n^m,$$

où le premier membre est évidemment égal à $\frac{a_{mn}}{a_m}$. Donc, en échangeant entre elles les lettres m, n, on trouve

$$a_{mn}=a_m a_n^m=a_n a_m^n,$$

et on en conclut aisément

$$\sqrt[n-1]{a_n}=\sqrt[m-1]{a_m}=\text{constante absolue } a,$$

c'est-à-dire $a_n=a^{n-1}$. La formule (1), devenue maintenant

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)=n^{\frac{1}{2}-x}\,\Gamma(x)\,a^{n-1},$$

permet de déterminer a par les valeurs $\Gamma(1)=1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$: il suffit d'admettre $x=1$, $n=2$, et on trouve

$$a=\sqrt{2\pi}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

A notre connaissance, on n'a pas encore cherché le terme complémentaire dans le produit qui représente $\Gamma(x)$. En nous bornant au cas de la variable réelle, nous avons trouvé, au moyen d'une méthode générale, le résultat suivant

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=\frac{1.2\ldots n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}(n+1)^x\\ &\times\frac{\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{x+n}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{x+xn}}\left[\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^x}\right]^\theta.\end{aligned}$$

où $0<\theta<1$.