G. HUMBERT

Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques (suite)

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 24-30
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__24_1>

Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; par M. G. Humbert.

[Suite (¹)].

(Séance du 2 juillet 1880.)

Remarque. — On démontrerait de la même manière que, si des polynômes $R_1(x), R_2(x), \ldots, R_n(x)$, de degrés quelconques, satisfont à la même relation que les polynômes $P(x)$, à savoir

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} R_1(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z)\,dz + \ldots$$
$$+ \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{K(z)}{\Delta(z)} R_n(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z)\,dz = 0,$$

la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0

(¹) *Voir* le t. VIII de ce *Bulletin*, p. 191.

et x_1, du nombre des racines de $R_2(z)$ comprises entre x_1 et x_2, etc., du nombre des racines de $R_n(z)$ comprises entre x_{n-1} et x_n, est au moins égale à mn.

Plus généralement, en désignant par $f(z)$ une fonction qui ne change pas de signe entre x_0 et x_1, entre x_1 et x_2, etc., entre x_{n-1} et x_n, si on a la relation

$$\int_{x_0}^{x_1} f(z)R_1(z)P_\mu(z)dz + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(z)R_n(z)P_\mu(z)dz,$$

où $P_\mu(z)$ désigne un polynôme quelconque, au plus de degré μ, on en conclut que la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0 et x_1, etc., du nombre des racines de $R_n(z)$ comprises entre x_{n-1} et x_n, est au moins $\mu - n + 2$. Ce théorème ne cesse d'être vrai que si tous les polynômes $R(z)$ sont nuls.

Dans le cas de $n = 2$, par exemple, si l'on a

$$\int_{x_0}^{x_1} f(z)R_1(z)P_\mu(z)dz + \int_{x}^{x_2} f(z)R_2(z)P_\mu(z)dz = 0,$$

la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0 et x_1 et du nombre des racines de $R_2(z)$ comprises entre x_1 et x_2 est au moins égale à μ.

Si la somme des degrés de $R_1(z)$ et de $R_2(z)$ était inférieure à μ, il est clair que le théorème précédent donnerait un résultat absurde; on en conclut alors que

$$R_1(z) = 0,$$
$$R_2(z) = 0.$$

Même conclusion dans le cas général si la somme des degrés des polynômes $R(z)$ était inférieure à $\mu - n + 2$.

Théorème II. — *Les polynômes $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ satisfont à une équation différentielle d'ordre $n+1$, dans laquelle le coefficient d'une dérivée quelconque $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ est un polynôme entier en x, de degré μ.*

On a en effet

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz = 0;$$

on en conclut

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) P'_1(z) \Pi_{mn-2}(z) dz = 0,$$

en désignant par $P'_1(z)$ la dérivée de $P_1(z)$ et par $\Pi_{mn-2}(z)$ un polynôme entier en z quelconque, de degré inférieur ou égal à $mn - 2$.

On a en effet, après une intégration par parties,

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) P'_1(z) \Pi_{mn-2}(z) dz$$
$$= \sum [K(z) P_1(z) \Pi_{mn-2}(z)]_{x_0}^{x_1} - \sum \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) d[K(z) \Pi_{mn-2}(z)].$$

Or

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(z) d[K(z) \Pi_{mn-2}(z)]$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) \frac{K(z)}{\Delta(z)} [\Pi'_{mn-2} \Delta(z) + \Pi_{mn-2}(z) G(z)].$$

Mais le polynôme entre crochets

$$\Pi'_{mn-2}(z) \Delta(z) + \Pi_{mn-2}(z) G(z) = \chi(z)$$

est au plus de degré $(m+1)n - 2$; donc la somme

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) \frac{K(z)}{\Delta(z)} \chi(z) dz$$

sera nulle, en vertu de la relation fondamentale.

D'ailleurs, la fonction

$$K(z) P_1(z) \Pi_{mn-2}(z)$$

s'annule avec $K(z)$ pour les valeurs

$$z = x_0, \quad z = x_1, \quad \ldots, \quad z = x_n;$$

il reste donc

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) P'_1(z) \Pi_{mn-2}(z) dz = 0.$$

On aura de même

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z)\Delta(z)P_1''(z)\Pi_{(m-1)n-2}(z)\,dz = 0,$$

$$\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en général

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z)\Delta^{\mu}(z)P_1^{(\mu+1)}(z)\Pi_{(m-\mu)n-2}(z)\,dz = 0.$$

Ce sont ces relations qui vont nous donner la démonstration du théorème énoncé.

Pour simplifier les calculs, je donnerai cette démonstration dans le cas de $n = 2$; on verra aisément que la démonstration est générale.

Je remarque d'abord que de la relation

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z)\Delta^{\mu}(z)P_1^{(\mu+1)}(z)\Pi_{(m-\mu)n-2}(z)\,dz = 0$$

je puis déduire, puisque $K(z)$ s'annule pour $z = x_0, x_1, \ldots, x_n$,

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} d[K(z)\Delta^{\mu}(z)P_1^{(\mu+1)}(z)]\Pi_{(m-\mu)n-1}(z) = 0.$$

Les Π désignent toujours des polynômes quelconques de degré égal ou inférieur à l'indice.

Dans le cas de $n = 2$, considérons les trois équations

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z)\Pi_{2m}(z)\,dz + \int_{x_1}^{x_2} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_2(z)\Pi_{2m}(z)\,dz = 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} K(z)P_1'(z)\Pi_{2m-2}(z)\,dz + \int_{x_1}^{x_2} K(z)P_2'(z)\Pi_{2m-2}(z)\,dz = 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} d[K(z)\Delta(z)P_1''(z)]\Pi_{2m-3}(z)\,dz$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} d[K(z)\Delta(z)P_2''(z)]\Pi_{2m-3}(z)\,dz = 0.$$

Dans la première de ces équations, posons

$$\Pi_{2m}(z) = C\Delta(z)\Pi_{2m-3}(z),$$

ce qui est possible, puisque $\Delta(z)$ est du troisième degré (C désigne une constante arbitraire); dans la seconde, posons

$$\Pi_{2m-2}(z) = (Az + B)(z)\Pi_{2m-3},$$

et ajoutons les trois équations : il vient

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z)\big\{\Delta(z)P_1'''(z) + [G(z) + \Delta'(z)]P_1''(z) \\ + (Az + B)P_1'(z) + CP_1(z)\big\}\Pi_{2m-3}(z) = 0.$$

La fonction entre accolades est un polynôme de degré m au plus; il en est de même de la fonction analogue en $P_2(z)$, qui ne diffère de celle qui est écrite que par la substitution de $P_2(z)$ à $P_1(z)$.

Soient

$$\begin{aligned} P_1(z) &= A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots, \\ P_2(z) &= B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \ldots, \\ \Delta(z) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

et

$$G(z) = Dx^2 + Ex + F.$$

Le coefficient du terme en z^m dans la première fonction sera

$$A_0[m(m-1)(m-2) + (D+3)m(m-1) + Am + C].$$

Dans la seconde, ce sera B_0, multiplié par le même facteur.

De même, le coefficient du terme en z^{m-1} sera, dans la première fonction, de la forme

$$A_0(aA + bB + cC + d) + A_1(a'A + b'B + c'C + d'),$$

$a, b, c, d, a', b', c', d'$ étant des constantes faciles à former et dont quelques-unes peuvent être nulles.

Dans la seconde fonction, ce coefficient aura la même forme; il suffira de remplacer A_0 par B_0 et A_1 par B_1.

Or nous pouvons disposer des coefficients A, B, C de manière à satisfaire aux trois équations

$$m(m-1)(m-2)+(D+3)m(m-1)+Am+C=0,$$
$$aA+bB+cC+d=0,$$
$$a'A+b'B+c'C+d'=0.$$

Dans ce cas, la fonction

$$\Delta(z)P_1'''(z)+[G(z)+\Delta'(z)]P_1''(z)+(Az+B)P_1'(z)+CP_1(z)$$

sera au plus de degré $m-2$.

Il en sera de même de la fonction analogue en $P_2(z)$.

Désignons pour un instant ces fonctions par $R_1(z)$ et $R_2(z)$; on a trouvé

$$\int_{x_0}^{x_1} K(z)R_1(z)\Pi_{2m-3}(z)\,dz+\int_{x_1}^{x_2} K(z)R_2(z)\Pi_{2m-3}(z)\,dz=0.$$

Or, d'après une remarque faite plus haut, la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0 et x_1 et du nombre des racines de $R_2(z)$ comprises entre x_1 et x_2 est au moins égale à $2m-3$. Mais, ces deux polynômes étant au plus de degré $m-2$, cette proposition est absurde; il faut donc conclure que l'on a

$$R_1(z)=0,\quad R_2(z)=0$$

ou

$$\Delta(z)y'''(z)+[G(z)+\Delta'(z)]y''(z)+(Az+B)y'(z)+Cy(z)=0,$$

y désignant l'un des polynômes $P_1(z)$, $P_2(z)$. Cette relation démontre le théorème énoncé.

Dans le cas général, on donnerait du théorème II une démonstration tout à fait analogue et on arriverait à une équation de la forme indiquée.

Détermination de A, B, C. — Les équations qui déterminent ces constantes sont, en posant

$$\Delta=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,$$
$$G=Dx^2+Ex+F,$$
$$\alpha m(m-1)(m-2)+(D+3\alpha)m(m-1)+Am+C=0,$$
$$\alpha(m-1)(m-2)(m-3)$$
$$+(D+3\alpha)(m-1)(m-2)+A(m-1)+C=0,$$
$$\beta m(m-1)(m-2)+(E+2\beta)m(m-1)+Bm=0.$$

On suppose $m \geqq 2$.

Le déterminant des inconnues, étant

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = m,$$

n'est nul que si $m = 0$, c'est-à-dire si les polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des constantes ; mais alors les équations précédentes ne s'appliquent pas. On aurait dans ce cas $C = 0$, quels que soient A et B, ce qui est évident *a priori.*

(*A suivre.*)