BULLETIN DE LA S. M. F.

DE POLIGNAC

Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 30-42
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__30_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications; par M. de Polignac.

[Suite [1]].

(Séance du 2 juillet 1880.)

III.

Représentation d'une ramification au moyen d'un Tableau numérique.

1. Les éléments essentiels d'une ramification sont les suivants .

1° Le nombre de ses nœuds et l'ordre de chacun d'eux [2];

2° Leur ordre de succession sur les branches (indéfinies) qui les joignent, ce qu'on peut appeler la *loi de connexité* de ces mêmes nœuds.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, ... les nœuds numérotés au hasard. On pourra indiquer leur loi de connexité par des colonnes formées de chiffres juxtaposés, par exemple

1 2	2 4	3 7	....
1 3	2 5		
	2 6		

(1) *Voir* le t. VIII de ce *Bulletin,* p. 120.

(2) L'ordre d'un nœud est, par définition, le nombre des branches qui s'y réunissent (Ch. I).

En réunissant des groupes appartenant à des colonnes différentes, on formera des branches indéfinies ou des portions de branches. Ainsi, avec 1, 2 et 2, 4, on fera 1 2 4 et de même 1 3 7,.... Par ce moyen, on pourra, et généralement de plusieurs manières, remplacer l'ensemble des groupes de deux chiffres par un Tableau unique, formé d'un certain nombre de lignes horizontales. Dans le cas actuel, un de ces Tableaux sera

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{matrix}$$

et un autre

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 4 \end{matrix}$$

Remarquons que le critérium de l'équivalence des deux Tableaux est que chaque chiffre se trouve, dans l'un et dans l'autre, associé aux mêmes chiffres. Au moyen de l'un ou de l'autre, on peut évidemment tracer les branches de jonction de l'arbre, c'est-à-dire celles qui joignent les nœuds entre eux. Quant aux branches libres, on les indiquera sur chaque Tableau par des indices dont on affectera chaque lettre et dont il sera question plus loin. Pour le moment, nous allons nous occuper de la réduction d'un Tableau au nombre minimum de lignes horizontales. Nous l'appellerons alors *irréductible,* et nous verrons qu'il y en a plusieurs, mais équivalents, dans le sens donné ci-dessus à ce mot.

Appelons *lettres libres* celles qui commencent ou terminent une ligne; nous aurons la règle suivante :

Si une lettre a est libre dans deux lignes, le Tableau sera réductible; irréductible dans le cas contraire.

La première partie de cette règle est évidente; ainsi le premier Tableau précédent peut s'écrire

$$\begin{matrix} 7 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & & \end{matrix}$$

Pour démontrer la seconde, il suffit d'observer que, lorsque deux lignes se combinent, auquel cas le passage de l'une à l'autre s'effectue sur un chiffre commun aux deux, si ce chiffre commun n'est pas un chiffre libre *dans les deux lignes*, les chiffres négligés à droite et à gauche, dans chaque ligne, devront êre écrits de nouveau, pour conserver la loi de connexité. Ces deux tronçons se combinent d'ailleurs aussi en une seule ligne horizontale. On retrouvera donc deux lignes, et il n'y aura ni perte ni gain. Exemple : le Tableau précédent peut être modifié sur le chiffre 2, et s'écrira d'abord, en décomposant,

$$\begin{array}{lllll} 5 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & & & \\ 4 & 2 & & & \end{array}$$

puis, en recomposant,

$$\begin{array}{lllll} 5 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & & \end{array}$$

nouveau Tableau irréductible et équivalent au précédent.

Comme complément de ce qui précède, je mentionnerai une règle pour former *a priori* avec un nombre de chiffres donnés des Tableaux irréductibles ou non, mais susceptibles de représenter une ramification (moins les branches libres) :

Écrire les chiffres donnés sur des lignes horizontales, avec la condition que chaque ligne contienne un chiffre déjà écrit et n'en contienne qu'un.

Cette condition a pour but d'éviter les contours fermés, et il faut observer qu'elle n'est obligatoire que pour le procédé de formation du Tableau. En intervertissant ensuite les lignes, elle pourra se trouver en défaut, sans nuire à la représentation de la ramification considérée.

2. J'aborde maintenant la notation d'un Tableau au moyen d'indices. Prenons, pour fixer les idées, le Tableau irréductible annoté ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{lllll} 1_3 & 2_0 & 5_1 & 8_2 & 7_2 \\ 4_2 & 3_4 & 2_0 & & \\ 6_4 & 5_1 & 9_2 & 10_3 & \end{array}$$

il indiquera à la fois l'*ordre* de chaque nœud et sa *connexité;* ainsi :

Le nœud 1 est contigu à 2 et possède trois branches libres. Le nœud 2 est relié par trois branches de jonction aux nœuds 1, 5 et 3, et ne possède aucune branche libre, etc.

Sous cette forme, chaque ligne du Tableau ne représente encore qu'un parcours partiel commençant et aboutissant à un nœud. Pour que chacune d'elles indique clairement un tracé partiel complet, c'est-à-dire *un trait partant d'une extrémité libre et aboutissant à une autre extrémité libre, ou à une ligne déjà tracée,* nous conviendrons d'ajouter le signe ∞ au commencement et à la fin de chaque ligne du Tableau pour y représenter une branche libre, et de retrancher une unité aux indices de la lettre initiale et de la lettre finale de chaque ligne. A la vérité, nous pourrons parfois être conduits à l'indice négatif — 1 ; mais la considération en sera utile pour la généralité des formules. Le Tableau précédent devient ainsi

$$\begin{array}{llllllll} \infty & 1_2 & 2 & 5_1 & 8_2 & 7_1 & \infty \\ \infty & 4_1 & 3_4 & 2_{-1} & \infty \\ \infty & 6_3 & 5_1 & 9_2 & 10_2 & \infty \end{array}$$

et l'on voit immédiatement que l'indice négatif dont est affecté le chiffre 2 indique que ce nœud n'a pas de branche libre, et que le *trait* représenté par la deuxième ligne du Tableau aboutit en réalité à celui que représente la première.

En résumé, en appelant ε le nombre de branches libres d'un nœud, α son indice, la règle de notation d'un Tableau irréductible sera

$$\alpha = \varepsilon - 1 \quad \text{pour toute lettre libre,}$$
$$\alpha = \varepsilon \qquad \text{pour toute autre.}$$

Un Tableau réductible se notera de même. Si une lettre se trouve k fois lettre initiale ou finale, on retranchera k unités à son indice; on aura donc

$$\alpha = \varepsilon - k \quad \text{pour une lettre libre } (k \text{ fois}),$$
$$\alpha = \varepsilon \qquad \text{pour toute autre.}$$

IV.

Énumération, au moyen d'un Tableau, du nombre de traits qui composent une ramification.

1. Tout Tableau, irréductible ou non, représente un tracé particulier d'un certain nombre N de traits. Chaque ligne du Tableau donne explicitement un trait proprement dit; on en obtiendra ainsi un nombre R égal au nombre des lignes du Tableau. Quant aux autres, ils ne sont pas donnés explicitement; ce sont les *chemins* qui restent à parcourir autour de chaque nœud. Soit r le nombre de ces chemins pour un nœud quelconque; on aura

$$N = R + \Sigma r;$$

r dépend de l'indice par une relation qui sera donnée tout à l'heure.

Le nombre N a déjà été appelé *nombre fondamental* de la ramification. Dans ce qui suit, nous n'admettons nullement son invariabilité, nous proposant, au contraire, de la faire ressortir de la considération du Tableau.

Tout d'abord, il convient de montrer qu'on peut ramener l'investigation au cas d'un Tableau irréductible.

Soit le Tableau réductible suivant, dans lequel une lettre L est supposée lettre libre un nombre quelconque de fois :

$$\begin{array}{l} \infty \ldots \mathrm{L} \ldots \infty \\ \infty\, \mathrm{A} \ldots\ldots \mathrm{L}\infty \\ \infty\, \mathrm{B} \ldots\ldots \mathrm{L}\infty \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En réduisant les deux lignes A et B en une seule,

$$\infty\, \mathrm{A} \ldots \mathrm{L} \ldots \mathrm{B}\infty,$$

nous perdons un trait proprement dit. Mais, d'un autre côté, nous en gagnons un sur les branches libres qui restent autour du nœud L, car les deux ∞ qui ont disparu, et qui représentaient explicitement deux branches libres, se combineront *en un seul chemin*, qui se retrouvera dans l'indice, lequel devient, d'après la règle, $\varepsilon - k + 2$. Il n'y a donc ni perte ni gain sur l'ensemble des traits qui résultaient du premier Tableau.

Comme ce raisonnement peut se répéter indéfiniment, on en conclut que le nombre total de chemins qu'on trouve dans un Tableau quelconque est le même que dans le Tableau irréductible équivalent.

Considérons donc un Tableau irréductible, et occupons-nous, pour chaque nœud, de l'évaluation de r au moyen de l'indice qui lui correspond.

Appelons c la *connexité* d'un nœud quelconque (nombre de ses branches de jonction). On remarquera que

$$\text{à} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \varepsilon - 1 \\ \alpha = \varepsilon \end{array} \right\} \text{correspond} \left\{ \begin{array}{l} c = 2p - 1, \\ c = 2p. \end{array} \right.$$

Cela résulte de ce que, dans un Tableau irréductible, une lettre ne peut être lettre libre que dans une seule ligne (n° 1); on a alors $c = 2p - 1$, car, si cette lettre est répétée, elle se trouve partout ailleurs entre deux lettres.

Maintenant, si $c = 2p$, les lignes du Tableau absorberont les $p = \left(\frac{c+1}{2}\right)$ chemins fournis par les branches de jonction du nœud considéré. Il restera ε branches libres donnant $\left(\frac{\varepsilon+1}{2}\right)$ traits. Mais ici $\varepsilon = \alpha$; donc le nombre de traits afférent à l'indice est

$$r = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Si $c = 2p - 1$, les $p - 1$ premières lignes du Tableau qui passent par le nœud considéré absorberont $p - 1 = \left(\frac{c+1}{2}\right) - 1$ chemins. Il restera une branche de jonction non parcourue. Elle correspond, dans le Tableau, à une lettre libre. La ligne qui contient cette lettre absorbera à la fois cette branche de jonction isolée et une branche libre (représentée dans le Tableau par le signe ∞). A ce moment, on aura parcouru $\left(\frac{c+1}{2}\right)$ chemins, et il restera $\varepsilon - 1$ branches libres non encore parcourues. Ces dernières fournissent $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ traits. Mais ici $\varepsilon - 1 = \alpha$; on a donc toujours

$$r = \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right),$$

α pouvant, dans certains cas, être égal à -1. L'avantage de cette convention est, comme on voit, de conduire à une formule générale pour r.

De ce qui précède résulte l'équation générale

$$N = R + \sum \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right).$$

On peut la mettre sous une autre forme.

En effet, m désignant l'ordre d'un nœud quelconque, on sait que $\left(\frac{m + 1}{2}\right)$ est le nombre de chemins autour de ce nœud, considéré comme isolé. On aura donc

$$\left(\frac{m + 1}{2}\right) = \left(\frac{c + 1}{2}\right) + \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right),$$

par suite

$$N = R + \sum \left[\left(\frac{m + 1}{2}\right) - \left(\frac{c + 1}{2}\right)\right]$$

Or, dans un Tableau irréductible, R est une quantité constante *minima* (n° 1). La somme Σ est constante aussi, ne dépendant que des éléments fixes de la ramification. Donc N est une constante pour un Tableau irréductible, par suite pour tout Tableau, c'est-à-dire pour un tracé quelconque.

L'équation précédente est susceptible d'une autre interprétation. Si, dans la ramification donnée, on supprime toutes les branches libres, on obtiendra une nouvelle ramification, dans laquelle le nouveau nombre N sera égal au nombre R de la première ramification. Écrivons

$$N' = R,$$

et supposons qu'on soit parti de la ramification N'. Si l'on admet que N' est une constante, il en résultera la même propriété pour R, par suite pour N, nombre relatif à la ramification qu'on obtient en ajoutant un nœud à chaque extrémité libre de la ramification initiale et un nombre *quelconque de branches libres à chaque nœud*. On peut donc également démontrer l'invariabilité du nombre fondamental par induction, car la proposition, étant évidente pour un simple trait, c'est-à-dire pour une ramification composée d'une seule branche sans nœuds, se trouvera démontrée pour une deuxième ramification ayant deux nœuds et une infinité de branches libres, puis pour une troisième ayant déjà une infinité de nœuds, et ainsi de suite.

V.

1. La magnitude d'une ramification est, d'après M. Sylvester, le nombre de ses branches. Ici il ne s'agit, bien entendu, que de branches de jonction entre deux nœuds consécutifs ou de branches libres.

D'après cette définition, la magnitude d'une ramification qui ne possède qu'un nœud n'est autre chose que ce qui a été appelé *ordre du nœud*.

Isolons par des coupures tous les nœuds d'une ramification, comme il a été fait au § I (*Remarque fondamentale*). En rejoignant d'abord deux nœuds, on obtiendra une ramification partielle. Soient $M_{1,2}$ sa magnitude et m_1, m_2 les ordres des deux nœuds ; on aura

$$M_{1,2} = m_1 + m_2 - 1,$$

d'où une induction facile donnera, pour la magnitude M d'une ramification dont ν est le nombre des nœuds,

$$M = m_1 + m_2 + \ldots - (\nu - 1)$$

ou

$$M = \Sigma m - (\nu - 1).$$

D'ailleurs, nous avons trouvé (§ I)

$$N = \sum \binom{m+1}{2} - (\nu - 1);$$

donc

$$M - N = \Sigma m - \sum \binom{m+1}{2}.$$

Séparant les ordres pairs et impairs comme au § II (n° 2), nous aurons

$$\Sigma m = 2(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p) + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i) + i$$

ou

$$\Sigma m = 2\Sigma\mu + 2\Sigma\lambda + i$$

et

$$\sum\left(\frac{m+1}{2}\right) = \Sigma\mu + \Sigma\lambda + i,$$

par suite

$$M - N = \Sigma\mu + \Sigma\lambda,$$

et, comme nous avons trouvé (§ II, n° 2)

$$N = \Sigma\mu + \Sigma\lambda - p + 1,$$

formule dans laquelle p désigne le nombre des nœuds d'ordre pair, il vient

$$M = 2N + p - 1$$

pour la relation qui existe entre la magnitude et le nombre fondamental.

Corollaire. — Si $p = 1$, la magnitude est paire ; elle est impaire si $p = 0$. Autrement dit, une ramification qui n'a pas de nœud d'ordre pair a un nombre impair de branches. Ce dernier résultat est facile à vérifier directement.

2. *Autres expressions pour* M *et pour* N. — En reliant un nombre quelconque de nœuds isolés pour former une ramification, on perd deux extrémités libres pour chaque nœud, hormis le premier et le dernier, qui n'en font perdre qu'une chacun. Donc, e désignant, comme au § II, le nombre des extrémités libres, on a

$$e = m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu - 2(\nu - 1).$$

La comparaison de cette expression avec la valeur de M du numéro précédent donne

$$M = e + \nu - 1,$$

d'où il résulte aussi

$$2N = e + \nu - p,$$

et, comme $\nu = p + i$,

$$2N = e + i,$$

i désignant le nombre des nœuds d'ordre impair.

3. *Centres et axes de distance.* — Les centres et les axes que possèdent les ramifications ont été signalés pour la première fois par M. Jordan. Voici comment leur existence se rattache aux considérations précédentes.

Parmi les chemins, tels que nous les avons définis, qu'on peut suivre dans une ramification, il y en a un ou plusieurs qui contiennent un nombre maximum de nœuds. Appelons-les *traits principaux,* et, adoptant un sens de parcours sur l'un d'eux, numérotons les nœuds $1, 2, 3, \ldots, n$, comme ils se présentent. Quel que soit l'ordre du nœud 1, toutes ses branches moins une seront des branches libres, car, si l'une d'elles contenait un nœud autre que 1, en parcourant le trait principal en sens inverse, on en trouverait un nouveau contenant $n+1$ nœuds, ce qui est contre l'hypothèse. Pour la même raison, les branches issues du nœud 2 ne pourront avoir chacune qu'un autre nœud, et ainsi de suite. En renversant le sens du parcours, on tirera la même conclusion à l'égard des nœuds primitivement notés n et $n-1$, etc. Appelons *puissance* d'une branche indéfinie estimée à partir d'un nœud le nombre total de ses nœuds, y compris celui d'où elle part. Nous avons prouvé que sur tout trait principal deux nœuds à égale distance des extrêmes (comme rang) ont des branches extérieures dont les puissances maxima sont égales, et égales au rang le plus petit des deux nœuds. Si n est impair, $2p+1$, il y aura un nœud au milieu, de rang $p+1$. Si n est pair, $2p$, il y aura deux nœuds au milieu; leurs rangs seront p et $p+1$, et la puissance maxima de leurs branches, la même pour les deux, sera p. On peut donc dire que, selon les cas, tout trait principal contient un centre ou un axe (aussi appelé *bicentre* par M. Sylvester). Maintenant je dis que ce centre ou cet axe est le même pour tous les traits principaux. En effet, supposons que la ramification comporte un centre et qu'il y en ait deux distincts sur deux traits principaux différents; on aura $n = 2p + 1$, et le rang de chacun des deux centres sera $p+1$ sur le trait principal auquel il appartient. Or il y a nécessairement une branche qui joint ces deux centres; mais au moyen de cette branche on obtiendrait un parcours composé d'au moins $2p + 2$ nœuds, ce qui est impossible. Le raisonnement serait le même dans le cas d'un axe. On peut énoncer ainsi cette propriété :

Dans toute ramification, les branches indéfinies qui contiennent le maximum de nœuds ont toutes une branche centrale commune ou un nœud central commun selon que le nombre maximum de nœuds est pair ou impair.

Une ramification donnée peut être complétée de manière que chacune de ses branches obtienne sa puissance maxima. Elle est alors parfaitement symétrique.

Le centre et l'axe dont les considérations qui précèdent ont défini le mode d'existence sont appelés *centre et axe de distance*. Il y a un autre centre et un autre axe, qu'on appelle *centre et axe de magnitude*. Pour leur définition, voir *Educational Times*, question 5208, par M. Sylvester ; solution par M. Cayley.

4. L'évaluation de la magnitude se fait facilement au moyen du tableau représentatif. Le nombre des branches qu'on rencontre dans chaque ligne est égal au nombre des intervalles entre les chiffres de cette ligne (y compris les deux ∞), plus la somme des indices, ces derniers n'étant comptés qu'une fois chacun. D'après cela, soit f le nombre des chiffres que contient une ligne, les deux ∞ exclus; le nombre des branches de cette ligne sera

$$1 + f + \text{somme des indices},$$

d'où l'on conclut, pour la magnitude,

$$M = R + \Sigma f + \Sigma \alpha.$$

Il ne faut pas perdre de vue que, dans cette formule, chaque chiffre du Tableau est compté autant de fois qu'il s'y trouve répété; l'indice seulement une fois. Pour ce qui est de Σf, observons qu'un chiffre n sera répété dans le Tableau chaque fois qu'un des chemins qui composent la somme R passera par le nœud n. Mais le Tableau doit, au moyen de ses chemins, absorber toutes les branches de jonction aboutissant à n. Donc n apparaîtra dans le Tableau

$\left(\frac{c_n+1}{2}\right)$ fois, c_n étant, comme ci-dessus, la connexité du nœud n. On a donc simplement

$$\Sigma f = \sum \left(\frac{c+1}{2}\right).$$

D'autre part, c étant la connexité d'un nœud, Σc sera deux fois le nombre des branches de jonction; car, dans Σc, chaque branche de jonction est répétée deux fois. Σc est donc aussi deux fois le nombre des intervalles entre les chiffres du Tableau dans chaque ligne; par suite

$$\Sigma c = 2(\Sigma f - \mathrm{R}),$$

ou

$$\Sigma c = 2\left[\sum\left(\frac{c+1}{2}\right) - \mathrm{R}\right],$$

$$2\mathrm{R} = 2\sum\left(\frac{c+1}{2}\right) - \Sigma c.$$

Cette formule donne en quelque sorte une définition arithmétique du nombre R au moyen de nombres entiers donnés $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$. Observons d'ailleurs qu'avec ces mêmes nombres pris au hasard on ne pourra pas en général former une arborescence ayant ν nœuds, et dont les nombres donnés représentent les connexités respectives. Il y a en effet une relation entre ν et Σc. Un Tableau irréductible la met immédiatement en évidence, car, en se rappelant que chaque ligne, sauf la première, contient une lettre répétée et une seule, toutes les autres étant des lettres nouvelles, que d'ailleurs chaque lettre représente un nœud, on en conclura immédiatement

$$\nu = \Sigma f - (\mathrm{R} - 1),$$

et la comparaison de cette équation avec la dernière donne

$$2\nu = \Sigma c + 2, \quad \text{ou} \quad \Sigma c = 2(\nu - 1).$$

On voit que par la considération du Tableau le champ des recherches s'élargit de lui-même; mais je ne crois pas devoir entrer pour le moment dans de plus grands développements à cet égard. Je me bornerai à remarquer, en terminant, qu'une ramification fournit des solutions en nombres entiers positifs du système d'équations indéterminées

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = 2(\nu - 1),$$

$$\left(\frac{x_1+1}{2}\right) + \left(\frac{x_2+1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{x_\nu+1}{2}\right) = F,$$

dans lesquelles les x sont les inconnues et les seconds membres des quantités données, car les formules précédentes donneront

$$R = F - \nu + 1,$$

et le problème se trouve ramené à la formation, suivant les règles données, d'un Tableau irréductible de R lignes horizontales et composé des chiffres 1, 2, 3, ..., ν, ce qui ne présente pas de difficulté. On en pourra former plusieurs. Le Tableau une fois écrit ou la ramification tracée, les x se trouveront déterminées simultanément par les connexités des nœuds. La considération du Tableau donnera, pour les conditions de possibilité du problème,

$$\nu - 1 < F < \nu + \left(\frac{\nu+1}{2}\right).$$