BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur une formule de M. Hermite

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 42-45
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__42_1>

Sur une formule de M. Hermite; par M. HUMBERT.

(Séance du 19 novembre 1880.)

M. Hermite a démontré que la fonction

$$\frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x} = f(x,a)$$

satisfait à l'équation de Lamé dans le cas de $n=1$:

$$(1) \qquad f''(x,a) = (2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 a) f(x,a).$$

Il a donné aussi la formule

$$(2) \qquad \mathrm{B}\int f(x,a)f(x,b)\,dx = \frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)} e^{-\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right]x}.$$

Cette formule suffit pour démontrer un certain nombre de propriétés des fonctions $f(x, a)$; comme application, on se propose ici d'en tirer la relation (1).

On partira pour cela de la décomposition de $\dfrac{\Theta(x+a+b)\Theta(x)}{\mathrm{H}(x+a)\mathrm{H}(x+b)}$ en éléments simples.

On aura une expression de la forme

$$\frac{\Theta(x+a+b)\Theta(x)}{\mathrm{H}(x+a)\mathrm{H}(x+b)} = \alpha + \beta\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}(x+a) + \gamma\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}(x+b).$$

β et γ sont de signes contraires. En effet, β est le résidu relatif au pôle $x = -a$:

$$\beta = \frac{\Theta(b)\Theta(a)}{\mathrm{H}'(0)\mathrm{H}(b-a)},$$

$$\gamma = \frac{\Theta(b)\Theta(a)}{\mathrm{H}'(0)\mathrm{H}(a-b)}.$$

On a donc, en désignant par C une constante,

$$\mathrm{C}\frac{\Theta(x+a+b)\Theta(x)}{\mathrm{H}(x+a)\mathrm{H}(x+b)} = \alpha + \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}(x+a) - \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}(x+b),$$

faisant

$$x = ik',$$

$$0 = \alpha + \frac{\Theta'}{\Theta}(a) - \frac{\Theta'}{\Theta}(b).$$

Donc

$$\mathrm{C}\frac{\Theta(x+a+b)\Theta(x)}{\mathrm{H}(x+a)\mathrm{H}(x+b)}$$
$$= \left[\frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right] - \left[\frac{\mathrm{H}'(x+b)}{\mathrm{H}(x+b)} - \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right].$$

L'équation (2) s'écrit alors, A étant une constante,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}\int f(x,a)f(x,l)\,dx \\ &\quad = e^{-\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right]x}\left\{\frac{\mathrm{H}(x+a)\mathrm{H}(x+b)}{\Theta^2(x)}\left[\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right]\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\mathrm{H}'(x+a)\mathrm{H}(x+b) - \mathrm{H}'(x+b)\mathrm{H}(x+a)}{\Theta^2(x)}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Or on a

$$f(x, a) = \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

$$f'_x(x, a) = \left[\frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}(x+a)\Theta'(x)}{\Theta^2(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}\right] e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}.$$

Si l'on calcule la fonction

$$f'_x(x,a)f(x,b) - f'_x(x,b)f(x,a),$$

on trouve le second membre de (3). Donc

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{A}\int f(x,a)f(x,b)\,dx = f'(x,a)f(x,b) - f'(x,b)f(x,a).$$

On en tire

$$\mathrm{A}f(x,a)f(x,b) = f''_x(x,a)f(x,b) - f''_x(x,b)f(x,a),$$

d'où

$$\text{(5)} \qquad \frac{f''(x,a) - \mathrm{A}f(x,a)}{f(x,a)} = \frac{f''(x,b)}{f(x,b)}.$$

A est une fonction de a et de b; soit A' sa valeur pour $b = 0$.

On a, en faisant $x = b$ dans l'équation précédente,

$$\frac{f''(x,a) - \mathrm{A}'f(x,a)}{f(x,a)} = \frac{\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} x} = 2k^2\sin^2 x - 1 - k^2.$$

Donc

$$f''(x,a) = f(x,a)(2k^2\operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + \mathrm{A}').$$

Pour calculer A', faisons $x = 0$. On trouve aisément

$$-1 - k^2 + \mathrm{A}' = \frac{\mathrm{H}''(a)}{\mathrm{H}(a)} - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{2\Theta'(a)}{\Theta(a)}\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \frac{\Theta'^2(a)}{\Theta^2(a)},$$

ou, en tenant compte de ce que

$$\frac{d^2}{da^2}\left[\frac{\mathrm{H}(a)}{\Theta(a)}\right] = \frac{\mathrm{H}(a)}{\Theta(a)}(2k^2\operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2),$$

il vient

$$-1-k^2+A'=\frac{-\Theta''(0)}{\Theta(0)}-\frac{\Theta'^2(a)}{\Theta^2(a)}+\frac{\Theta''(a)}{\Theta(a)}+2k^2\,\mathrm{sn}^2 a-1-k^2.$$

Or, à l'aide de la relation

$$\mathrm{sn}^2(a)=\frac{1}{k^2}\left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}-D_a\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right],$$

on déduit

$$A'=+k^2\,\mathrm{sn}^2 a.$$

Donc l'équation différentielle prend la forme

$$f''(x,a)=f(x,a)(2k^2\,\mathrm{sn}^2 x-1-k^2+k^2\,\mathrm{sn}^2 a),$$

que lui a donnée M. Hermite.

Inversement, on peut déduire de l'équation la formule qui vient d'y conduire, en employant un procédé bien connu. On a

$$\begin{aligned}&\int f(x,a)f(x,b)(2k^2\,\mathrm{sn}^2 x-1-k^2+k^2\,\mathrm{sn}^2 a)\,dx\\&=\int f''(x,a)f(x,b)\,dx\\&=+f'(x,a)f(x,b)-f(x,a)f'(x,b)+\int f''(x,b)f(x,a)\,dx.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}&\int f(x,a)f''(x,b)\,dx\\&=\int f(x,a)f(x,b)(2k^2\,\mathrm{sn}^2 x-1-k^2+k^2\,\mathrm{sn}^2 b)\,dx;\end{aligned}$$

par suite,

$$\int f(x,a)f(x,b)(k^2\,\mathrm{sn}^2 a-k^2\,\mathrm{sn}^2 b)\,dx=f'(x,a)f(x,b)-f(x,a)f'(x,b),$$

ce qui est bien la formule (2) mise sous la forme (4).