BULLETIN DE LA S. M. F.

C. STÉPHANOS

Sur certaines directions de transversales des courbes algébriques qui correspondent aux directions des axes des coniques

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 49-56
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__49_1>

Sur certaines directions de tranversales des courbes algébriques, qui correspondent aux directions des axes des coniques; par M. C. Stephanos.

(Séance du 7 janvier 1881.)

1. Considérons une courbe algébrique plane du $m^{\text{ième}}$ degré, ayant pour équation en coordonnées rectangulaires

$$f(x, y) = 0.$$

Le produit des segments interceptés sur une transversale faisant avec l'axe des x un angle ω, entre un point M de la transversale dont les coordonnées sont x et y et les m points où elle rencontre la courbe, est donné par l'expression

$$\frac{f(x, y)}{F(\cos\omega, \sin\omega)},$$

$F(x, y)$ étant le polynôme homogène de degré m en x, y dans $f(x, y)$.

De cette formule résulte, comme on sait, le théorème de Newton sur la proportionnalité des produits de segments qui correspondent à des transversales passant par deux points du plan et ayant les mêmes directions, d'où l'on tire cette autre conséquence que les directions des transversales passant par un point M et auxquelles correspond un produit de segments minimum ou maximum sont les mêmes quel que soit le point M.

Steiner s'est occupé de ces directions remarquables et en a donné une série de propriétés bien intéressantes, relatives surtout au cas d'une conique [*Vermischte Sätze und Aufgaben* (*Journal de Crelle,* vol. LV, p. 356)]. Dans la présente Note, dont nous possédons les résultats depuis longtemps, nous allons ajouter quelques propositions sur le même sujet.

2. Les directions de transversales auxquelles correspond un produit de segments minimum ou maximum sont données par l'équation

$$\varphi = \cos\omega\,\frac{\partial F}{\partial\sin\omega} - \sin\omega\,\frac{\partial F}{\partial\cos\omega} = 0\,;$$

elles sont donc au nombre de m et ne dépendent que des directions des asymptotes de la courbe $f = 0$, données par l'équation

$$F(\cos\omega, \sin\omega) = 0$$

et des points cycliques à l'infini (*voir* n° 8). Cependant, dans le cas où m est pair ($= 2n + 2$) et où

$$F(\cos\omega, \sin\omega) = c(\cos^2\omega + \sin^2\omega)^{n+1},$$

l'expression

$$\cos\omega\,\frac{\partial F}{\partial\sin\omega} - \sin\omega\,\frac{\partial F}{\partial\cos\omega}$$

est identiquement nulle, puisqu'alors les produits de segments correspondant aux diverses transversales passant par un point M sont tous égaux.

Les directions dont il s'agit coïncident, dans le cas d'une conique, avec les directions de ses axes, et elles ont pour une courbe quelconque, comme pour les coniques, la propriété d'être perpendiculaires au diamètre du premier degré (droite polaire)

$$(\cos\omega f'_x + \sin\omega f'_y)^{(m-1)} = 0,$$

qui leur correspond.

Pour ces raisons et pour abréger, nous désignerons ces directions, dans les énoncés suivants, sous le nom de *directions axiales de la courbe* $f = 0$.

Il n'y a que les courbes de degré pair $2n + 2$ pour lesquelles $F(\cos\omega, \sin\omega) = c(\cos^2\omega + \sin^2\omega)^{n+1}$, c'est-à-dire ayant pour points $(n + 1)^{\text{iples}}$ les points cycliques à l'infini, qui aient une infinité de directions axiales.

3. *Étant donnés sur un cercle* $2m$ *points* $P_1, P_2, \ldots$, *les droites passant par un point arbitraire* P *de ce cercle et ayant pour directions les directions axiales du système des droites* PP_1, $PP_2, \ldots$ *déterminent sur le cercle un groupe de* $2m$ *points* Q_1, $Q_2, \ldots$, *qui ne dépend pas de la position du point* P *sur le cercle.*

Maintenant, *si l'on considère dans le plan d'une courbe* $f = 0$, *d'ordre* m, *une série de cercles ayant le même centre* K, *et que sur chacun de ces cercles on détermine le groupe des* $2m$ *points* $Q_1, Q_2, \ldots$ *dérivé du groupe des* $2m$ *points* $P_1, P_2, \ldots$ *communs à ce cercle et à la courbe* $f = 0$ *d'après le procédé indiqué par la proposition précédente, le lieu des points* Q *sera la courbe* (Q) *du* $m^{\text{ième}}$ *degré passant par le point* K *et par les pieds des normales abaissées du point* K *sur la courbe* $f = 0$.

Toutes les courbes (Q) *correspondant ainsi aux divers points* K *du plan de* $f = 0$ *ont des asymptotes dont les directions coïncident avec les directions axiales de la courbe* $f = 0$.

4. Dans le cas d'une conique, il existe entre les deux directions axiales une relation métrique, puisqu'elles sont perpendiculaires entre elles. Il y a donc lieu d'examiner, pour le cas des courbes d'ordre supérieur, s'il existe toujours entre les directions axiales une relation.

Cette question revient à la question analytique suivante :

Quelle condition doit remplir une fonction $\varphi(\cos\omega, \sin\omega)$ *entière, homogène et de degré* m *en* $\cos\omega, \sin\omega$, *pour qu'elle coïncide avec la dérivée d'une autre fonction* $F(\cos\omega, \sin\omega)$ *entière, homogène et de degré* m *en* $\cos\omega, \sin\omega$?

La question ainsi posée n'offre pas de difficulté; cependant. comme la réponse en est bien curieuse, nous allons l'examiner avec quelque détail. Le résultat qu'on tirera de là pour notre problème géométrique sera que :

Le système des m directions axiales d'une courbe $f = 0$ n'est assujetti à remplir une relation métrique que dans le cas où m est pair.

5. Soit symboliquement

$$\varphi(\cos\omega, \sin\omega) = (a_1 \cos\omega + a_2 \sin\omega)^m.$$

En posant

$$u = \cos\omega + i\sin\omega, \quad v = \cos\omega - i\sin\omega$$

ou

$$\cos\omega = \frac{u+v}{2}, \quad \sin\omega = \frac{u-v}{2i},$$

on a

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{2^m}[a_1(u+v) - ia_2(u-v)]^m \\ &= \frac{1}{2^m}[(a_1 - ia_2)u + (a_1 + ia_2)v]^m.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$2^m\varphi = \sum \binom{m}{k} A_k u^k v^{m-k} = \sum \binom{m}{k} A_k (\cos\omega - i\sin\omega)^{m-2k},$$

étant posé

$$A_k = (a_1 - ia_2)^k (a_1 + ia_2)^{m-2k}.$$

Ainsi, dans le cas de m impair ($= 2n+1$) on a

$$\begin{aligned}2^m\varphi = &\sum_{k=0}^{k=n} \binom{m}{k} A_k \quad (\cos\omega - i\sin\omega)^{m-2k} \\ &+ \sum_{k=0}^{k=n} \binom{m}{k} A_{m-k} (\cos\omega + i\sin\omega)^{m-2k},\end{aligned}$$

tandis que dans le cas de m pair $(= 2n + 2)$ on a

$$2^m \varphi = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{m}{k} A_k (\cos\omega - i \sin\omega)^{m-2k}$$

$$+ \sum_{k=0}^{k=n} \binom{m}{k} A_{m-k} (\cos\omega + i \sin\omega)^{m-2k} + \binom{m}{n+1} A_{n+1}.$$

6. De cette manière, dans le cas où m est impair, on aura

$$2^m \int \varphi\, d\omega = i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} A_k (\cos\omega - i \sin\omega)^{m-2k}$$

$$+ i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} A_{m-k} (\cos\omega + i \sin\omega)^{m-2k} + \text{const.}$$

Le second membre de cette égalité, si l'on y rétablit l'homogénéité par rapport à $\cos\omega$, $\sin\omega$ en multipliant les divers termes par des puissances convenables de $\sin^2\omega + \cos^2\omega$, ne pourra représenter une fonction entière de $\cos\omega$, $\sin\omega$ que si l'on suppose la constante égale à zéro.

Ainsi :

Toute fonction

$$\varphi = (a_1 \cos\omega + a_2 \sin\omega)^m,$$

où $m = 2 + 1$, *est la dérivée d'une seule fonction* F *entière, homogène et de degré m en* $\cos\omega$, $\sin\omega$, *donnée par la formule*

$$2^m F = i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} (a_1 - i a_2)^k (a_1 + i a_2)^{m-k} (\cos\omega - i \sin\omega)^{m-2k} (\sin^2\omega + \cos^2\omega)^k$$

$$+ i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} (a_1 - i a_2)^{m-k} (a_1 + i a_2)^k (\cos\omega + i \sin\omega)^{m-2k} (\sin^2\omega + \cos^2\omega)^k.$$

7. Considérons maintenant le cas où m est pair. On a alors

$$
\begin{aligned}
2^m \int \varphi\, d\omega = {} & i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} A_k (\cos\omega - i \sin\omega)^{m-2k} \\
& + i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} A_{m-k} (\cos\omega + i \sin\omega)^{m-2k} \\
& + \binom{m}{n+1} A_{n+1}\, \omega + C.
\end{aligned}
$$

On voit que le second membre de cette égalité ne peut être une fonction algébrique de $\cos\omega$, $\sin\omega$ que si la condition

$$A_{n+1} = (a_1^2 + a_2^2)^{n+1} = 0$$

est remplie, et que, cela étant supposé, toutes les fonctions correspondant aux diverses valeurs de C qu'on obtient en rétablissant dans le second membre l'homogénéité par rapport aux $\cos\omega$, $\sin\omega$ seront entières.

Il résulte de là que :

Pour qu'une fonction

$$\varphi = (a_1 \cos\omega + a_2 \sin\omega)^m = \sum \binom{m}{k} a_k \cos^k\omega \sin^{m-k}\omega,$$

où $m = 2n + 2$, *soit la dérivée d'une fonction* F *entière, homogène et de degré m en* $\cos\omega$, $\sin\omega$, *il faut que l'on ait*

$$(a_1^2 + a_2^2)^{n+1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum \binom{n+1}{k} a_{2k} = 0;$$

et qu'alors la fonction φ *a la même propriété par rapport à une* *infinité de fonctions* F *comprises dans l'expression*

$$2^m F = i\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k}(a_1 - ia_2)^k(a_1+ia_2)^{m-k}(\cos\omega - i\sin\omega)^{m-2k}(\sin^2\omega+\cos^2\omega)^k$$
$$+ i\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k}(a_1 - ia_2)^{m-k}(a_1+ia_2)^{k}(\cos\omega + i\sin\omega)^{m-2k}(\sin^2\omega+\cos^2\omega)^k$$
$$+ \lambda(\sin^2\omega+\cos^2\omega)^{n+1}$$

et correspondant aux diverses valeurs de λ.

Ainsi se trouve résolue la question que nous nous sommes proposé de traiter (n° 4).

8. Si, dans les fonctions

$$\cos^2\omega+\sin^2\omega, \quad F = (a_1\cos\omega + a_2\sin\omega)^m,$$
$$\cos\omega\frac{\partial F}{\partial\sin\omega} - \sin\omega\frac{\partial F}{\partial\cos\omega},$$

on remplace les $\cos\omega$, $\sin\omega$ par des variables x_1, x_2, on obtient trois formes binaires

$$x_1^2+x_2^2, \quad G = (a_1x_1+a_2x_2)^m, \quad x_1\frac{\partial G}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial G}{\partial x_1},$$

dont la troisième coïncide avec le jacobien des deux premières. En transformant ces formes par une substitution linéaire arbitraire, mais de déterminant non nul, on peut remplacer $x_1^2+x_2^2$ par une forme quadratique quelconque à discriminant D différent de zéro. Les résultats obtenus précédemment (n^os 6, 7) donnent alors les propositions suivantes :

Toute forme binaire $\varphi(x_1, x_2)$ *de degré m impair ne peut être considérée comme jacobien d'une forme quadratique donnée (à* $D \lessgtr 0$*) et d'une autre forme du degré m que d'une seule manière.*

Pour qu'une forme binaire $\varphi = (a_1x_1+a_2x_2)^{2m}$ *soit le ja-*

cobien d'une forme quadratique binaire

$$\alpha = \alpha_0 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 = (x_1 y'_2 - x_2 y'_1)(x_1 y''_2 - x_2 y''_1)$$

(*telle que* $D \lesseqgtr 0$) *et d'une autre forme* G_0 *de degré* $2m$, *il faut que l'on ait*

$$(\alpha_0 a_2^2 - 2\alpha_1 a_1 a_2 + \alpha_2 a_1^2)^m = (a_1 y'_1 + a_2 y'_2)^m (a_1 y''_1 + a_2 y''_2)^m = 0,$$

c'est-à-dire il faut que les points y' *et* y'' *de la forme* α *soient harmoniques de degré m l'un de l'autre par rapport à la forme* φ; *mais alors la forme* φ *a la même propriété par rapport à une infinité de formes* G, *comprises dans l'expression*

$$G_0 + \lambda\alpha^m.$$

Il est à remarquer que la forme φ s'annule pour les points doubles, autres que y', y'', des formes du faisceau

$$G_0 + \lambda\alpha^m.$$