BULLETIN DE LA S. M. F.

GASCHEAU

Étude sur un cas singulier du mouvement d’un point matériel

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 207-219
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__207_1>

Etude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel;
par M. Gascheau (²).

(Séance du 16 juin 1882.)

PRÉFACE.

En traitant diverses questions de Mécanique rationnelle, j'ai rencontré plusieurs cas singuliers auxquels il ne m'a pas paru

(¹) Pour $k = n - 1$ on obtient 2^n, en accord avec Stringham (*loc. cit.*, p. 14.)

(²) En publiant l'étude de M. Gascheau, la Rédaction déclare qu'elle laisse à l'auteur toute la responsabilité de l'opinion qui y est soutenue, et elle ne gapossible d'appliquer le raisonnement mathématique, qui, partant de principes certains et, marchant de conséquence en conséquence, doit conduire à une solution incontestable; ces circonstances exceptionnelles exigent, à mon sens, un mode exceptionnel de raisonnement; celui que j'ai employé consiste dans l'*induction* substituée à la *déduction*. Mais il faut convenir que les solutions obtenues par ce moyen ne sont pas à l'abri de doutes et d'objections. Par ce motif, j'ai fait imprimer mon étude, non pour la publier, mais pour la distribuer aux géomètres dont les noms font aujourd'hui autorité dans la Science, et les assurer que je serais très reconnaissant à ceux qui m'adresseraient leur opinion motivée, fût-elle défavorable.

Plusieurs savants ont bien voulu répondre à mon appel. J'y distingue trois membres de l'Institut, parfaitement compétents, mais dont les trois réponses sont complètement divergentes, savoir : l'un rejette tout à fait ma solution; un autre l'admet d'une manière sommaire, sans donner les motifs de son approbation; et le troisième émet une opinion intermédiaire.

Je viens donc aujourd'hui présenter aux géomètres le calcul et le raisonnement spécial que j'ai appliqués à un problème qui est un cas particulier de l'art. 236 du *Traité de Mécanique* de Poisson (édit. de 1833).

---

rantit en aucune façon la rigueur de la solution qu'il propose pour un problème paradoxal. M. Gascheau admet l'existence réelle d'une force infinie qui agirait sur un point matériel. Or les forces sont toujours du même ordre de grandeur que les masses auxquelles elles sont appliquées; elles ne peuvent leur communiquer que des accélérations et des vitesses finies. L'auteur étend, par voie d'induction, le principe de l'inertie aux cas où la vitesse devient infinie, tandis que ce principe perd alors toute justesse. Qu'on cherche, par exemple, l'équation du mouvement rectiligne d'un point attiré vers un centre fixe proportionnellement à l'inverse du carré de la distance; on reconnaîtra que, dans ce cas limite, la vitesse du mobile change de signe en passant par l'infini quand il arrive au centre d'attraction, et qu'au lieu de franchir ce centre, le point mobile retourne à son point de départ, comme s'il avait rencontré une bande élastique. Le résultat admis par M. Gascheau pour la traversée du pôle est donc fictif à tous les points de vue, et rien ne prouve que le mobile ne rétrogradera pas, à partir de ce point, sans passer dans la seconde branche de la spirale hyperbolique. On observera également que les propriétés géométriques de cette courbe sont bien connues. Malgré ces objections de fond, l'analyse d'un cas singulier aussi étrange a paru présenter assez d'intérêt pour justifier l'admission du travail de M. Gascheau dans le *Bulletin de la Société mathématique*.

SOLUTION PROPOSÉE.

1. *Équations du mouvement d'un point matériel sollicité par une force centrale, attractive et inversement proportionnelle au cube de la distance du mobile au centre d'action.* — J'adopte les notations de Poisson (p. 446 et suivantes), sauf un changement indiqué ci-dessous dans l'expression de la valeur de la vitesse initiale; alors j'ai, à l'origine du mouvement,

$$t = 0, \quad \theta = 0, \quad r = \gamma, \quad \delta = \alpha, \quad v = \sqrt{2gh} = a. \tag{1}$$

En tenant compte de la relation générale

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{r\,d\theta}{dr},$$

l'équation des aires est ici

$$r^2\,d\theta = a\gamma \sin\alpha\,dt; \tag{2}$$

et celle des forces vives

$$v^2 = \frac{K\gamma^3}{r^2} + a^2 - K\gamma. \tag{3}$$

L'élimination de $d\theta$ entre ces deux équations donne

$$\frac{dr^2}{dt^2} + (a^2\sin^2\alpha - K\gamma)\frac{\gamma^2}{r^2} = a^2 - K\gamma.$$

Poisson résout cette équation dans deux cas, attribuant successivement une valeur positive et une valeur négative au coefficient de $\frac{\gamma^2}{r^2}$, sans s'occuper du cas où ce multiplicateur est nul; c'est celui que je traite ici, et, en conséquence, je pose

$$K\gamma = a^2\sin^2\alpha.$$

Cette relation, introduite dans l'équation précédente, donne

$$\frac{dr^2}{dt^2} = a^2\cos^2\alpha$$

et, par suite,

$$\frac{dr}{dt} = \pm a\cos\alpha;$$

d'où je conclus que la question de Mécanique donne lieu à deux problèmes distincts qui attribuent au rayon vecteur r, l'un une valeur croissante et l'autre une valeur décroissante, à mesure que le temps s'écoule.

En tenant compte des conditions (1), les intégrales de ces deux équations sont

$$(4) \qquad r = \gamma + a\cos\alpha t \quad \text{et} \quad r = \gamma - a\cos\alpha t.$$

Soient O le pôle et C le point de départ du mobile, de sorte que γ représente la distance OC.

Comme toutes les valeurs de la variable indépendante t sont comprises entre zéro et l'infini, sans que cette quantité prenne de valeurs négatives, si la première équation correspond au cas où le mobile est lancé dans la direction CA qui fait un angle aigu avec l'axe polaire, la deuxième s'appliquera au cas où le mobile part dans le sens opposé CA′ qui correspond à $\alpha + \pi$.

J'élimine dt entre l'équation des aires (2) et l'équation différentielle ci-dessus, où je prends le signe supérieur, ce qui donne

$$r^2 d\theta = \gamma \operatorname{tang}\alpha\, dr; \quad \text{d'où} \quad d\theta = \gamma \operatorname{tang}\alpha \frac{dr}{r^2}.$$

En intégrant, on aura, conformément aux conditions initiales,

$$(5) \qquad \theta = \operatorname{tang}\alpha\left(1 - \frac{\gamma}{r}\right).$$

Cette équation, dans laquelle la variable t n'entre pas explicitement, convient aux deux cas où l'on aura à employer les équations (4), puisque $\operatorname{tang}\alpha$ ne change pas quand l'angle α augmente de deux droits. On obtient sans difficulté ces deux dernières formules,

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{\gamma \operatorname{tang}\alpha}{r} = \operatorname{tang}\alpha - \theta,$$

$$(7) \qquad v^2 = a^2\left(\cos^2\alpha + \frac{\gamma^2}{r^2}\sin^2\alpha\right).$$

2. *Trajectoire.* — Je vais exposer succinctement les propriétés géométriques de la trajectoire du mobile représentée par l'équation (5), que l'on peut écrire sous la forme

$$r = \gamma \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\alpha - \theta},$$

où θ sera la variable indépendante.

Cette courbe est une *spirale hyperbolique*. Elle a un axe de symétrie qui sera dirigé suivant l'axe polaire en donnant à la constante qui y entre la valeur

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

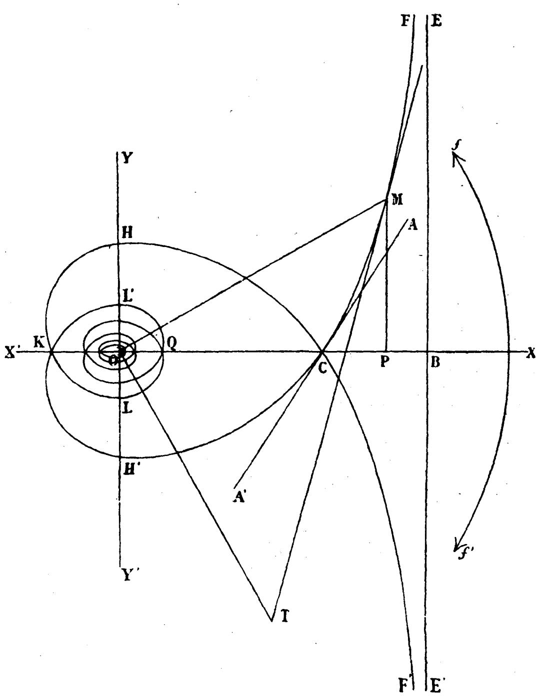
L'angle aigu α sera donc approximativement de $57°30'$. Ainsi on a les deux équations

$$(5) \qquad r = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - \theta},$$

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{r}.$$

A partir du point C, la courbe déterminée par l'équation (5) se

Fig. 1.



partage en deux arcs symétriques CF et CF', et deux spires symétriques CHKLQ...O et CH'KL'Q...O.

Asymptote rectiligne. — Soit OP l'abscisse d'un point d'un arc, on aura

$$x = r\cos\theta = \frac{\pi}{2}\gamma\frac{\cos\theta}{\frac{\pi}{2}-\theta} = \frac{\pi}{2}\gamma\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\frac{\pi}{2}-\theta};$$

valeur qui se réduit à $\frac{\pi}{2}\gamma$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$; d'où l'on conclut qu'en prenant $OB = \frac{\pi}{2}\gamma$, et menant BL perpendiculaire à l'axe, cette droite sera asymptote aux deux arcs.

Il résulte de l'équation (6) que la *sous-tangente* d'un point quelconque de la courbe est égale à cette quantité OB et, par conséquent, *constante;* propriété qui sert souvent de définition à la spirale hyperbolique.

Pôle asymptotique. — L'équation (5) étant satisfaite par $r = 0$ et $\theta = \infty$, j'en conclus que le mobile parcourant l'une des spires en se rapprochant continuellement du pôle ne peut atteindre ce point que par un nombre infini de révolutions de son rayon vecteur.

Nœuds. — Points de croisement des deux spires sur leur axe de symétrie, tels que C, K, Q, ..., déterminés par les valeurs de θ comprises dans la formule $n\pi$, où n est un nombre entier. L'axe est bissecteur de l'angle des tangentes aux deux spires. L'axe est le rayon vecteur d'un nœud quelconque. Les nœuds sont en nombre infini. Le point C, commun aux deux arcs et aux deux spires, est le premier nœud. Le pôle est la limite des nœuds.

Rectification.— La formule générale $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2$, appliquée à la courbe représentée par l'équation (5), donne

$$ds = \frac{dr}{2r}\sqrt{4r^2+\pi^2\gamma^2}$$

et, en intégrant,

$$\int ds = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2+\pi^2\gamma^2} + \frac{\pi\gamma}{4}\log\frac{\sqrt{4r^2+\pi^2\gamma^2}-\pi\gamma}{\sqrt{4r^2+\pi^2\gamma^2}+\pi\gamma} + \text{const.}$$

Pour $r = \infty$, la première partie est infinie; donc chaque arc, CF ou CF′, est infini, résultat facile à prévoir. Pour $r = 0$, la seconde partie est également infinie : donc chaque spire est infinie, ce qui n'était pas évident *a priori.*

Corollaire. — Les formules (5), (6) et (7) donnent, sans difficulté, les conséquences suivantes.

Soient m' et m deux points symétriques de la trajectoire; les vitesses en ces points sont égales et leurs directions $m't'$ et mt sont également inclinées par rapport à l'axe polaire ; soient n' et n deux autres points symétriques l'un de l'autre : les deux arcs symétriques $m'n'$ et nm seront parcourus en temps égaux.

Remarque. — La figure de la trajectoire, en même temps variée et régulière, ses propriétés géométriques, son rôle dans la question de Mécanique actuelle lui donnent, ce me semble, comme à la cycloïde, assez d'intérêt pour faire regretter que son étude ne tienne pas plus de place dans les Traités de Calcul infinitésimal et de Mécanique rationnelle.

Observations sur les limites et l'étendue de la solution d'un problème. — Il n'y a pas de calcul algébrique, finissant par une équation, qui ne soit la traduction d'une suite de déductions légitimes ; par conséquent, la traduction de cette équation, en langage ordinaire, est généralement une proposition admissible au rang des vérités mathématiques, mais il peut se produire des cas particuliers où un résultat obtenu sorte de la catégorie des quantités ordinaires dont la signification est connue et doit être déterminée. Alors une explication devient nécessaire et, si *l'interprétation* exigée par la présence d'une valeur singulière *ne présente rien qui soit contraire à la raison, la solution est acceptable,* en vertu du caractère infaillible appartenant au Calcul algébrique : je n'ai pas besoin d'ajouter que cette observation vise le raisonnement spécial annoncé dans la Préface.

Les valeurs critiques dont il s'agit ici sont celles qui introduisent des résultats infinis ou imaginaires; or un de mes adversaires déclare qu'il n'a pas moins de répugnance pour les uns que pour les autres, et qu'il faut rejeter indistinctement toute solution où ils se présentent. Cependant j'y trouve une différence bien tranchée, et je regarde une *quantité infinie* comme pouvant manifester un changement brusque dans une fonction, mais sans lui imposer la moindre interruption de réalité, tandis qu'une valeur *imaginaire* de la fonction attribue à la variable une limite, passé laquelle cette fonction cesse d'exister. Ainsi, par exemple, quand on porte son attention : 1° sur un cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires; 2° sur une hyperbole équilatère rapportée à deux axes rectangulaires parallèles à ses asymptotes; l'ordonnée dans chaque cas étant prise pour fonction de l'abscisse, on voit, dans le premier, que, quand la variable a atteint la grandeur du rayon, elle peut continuer à croître jusqu'à l'infini, sans que la fonction prenne jamais une valeur réelle. Il n'en arrive pas autant à l'ordonnée de l'hyperbole; car, tout infinie qu'elle devient pour une valeur *déterminée de l'abscisse,* elle n'en prend pas moins des valeurs réelles et déterminées et pour toutes les valeurs de la variable, fussent-elles aussi rapprochées que l'on voudra de sa valeur critique : seulement celle-ci correspond au changement subit du signe de la fonction. Il n'y aurait eu même aucun changement s'il se fût agi de l'hyperbole représentée par l'équation $x^2y = 1$. De là je conclus qu'en passant par l'infini cette dernière ordonnée *reste continue,* tandis que celle de la première, représentée par $xy = 1$, devient *discontinue.*

4. *Mouvement d'un point qui s'éloigne du pôle.* — Le rapport $\frac{dr}{dt}$, obtenu (n° 1), est positif à l'origine du mouvement, et la vitesse initiale a est dirigée dans le sens CA. C'est donc la première équation (4) qui convient à ce sens, et le mouvement est déterminé par les équations

$$r = \gamma + a\cos\alpha t, \tag{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{r}\right), \tag{5}$$

$$\tang\delta = \frac{\pi}{2}\frac{\gamma}{r}, \tag{6}$$

$$v^2 = a^2\left(\cos^2\alpha + \frac{\gamma^2}{r^2}\sin^2\alpha\right), \tag{7}$$

desquelles on déduit, sans difficulté, les lois suivantes :

1° Le rayon vecteur croît de quantités égales en temps égaux, ou bien, le mouvement du mobile est uniforme suivant le rayon vecteur.

2° La grandeur du rayon vecteur varie depuis γ jusqu'à l'infini, et la durée de cet accroissement est infinie.

3° L'inclinaison du rayon vecteur sur l'axe polaire varie depuis zéro jusqu'à 90°, limite qu'elle n'atteint qu'après un temps infini.

4° La vitesse propre du mobile décroît depuis a jusqu'à $a\cos\alpha$, limite qu'elle n'atteint qu'après un temps infini.

5° Toute la trajectoire du mobile, dans ce mouvement, se réduit à l'arc illimité CF, asymptotique à la droite BE, dont il peut s'approcher jusqu'à une distance moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit, mais sans l'atteindre jamais et sans que sa vitesse soit jamais éteinte.

5. *Mouvement d'un point qui s'approche du pôle.* — La vitesse initiale a étant maintenant dirigée dans le sens CA′, c'est la seconde équation (4) du n° 1 qui convient à ce cas. Je la transforme en posant

$$\frac{\gamma}{a\cos\alpha} = \mathrm{T},$$

et j'obtiens

$$r = \gamma\left(1 - \frac{t}{\mathrm{T}}\right). \tag{4}$$

Les trois autres (5), (6) et (7) du n° 4 ci-dessus complètent la solution qui donne, de la manière suivante, les lois du mouvement :

1° Lorsque le temps atteint la valeur

$$t = \mathrm{T},$$

on trouve, par les équations (4) et (7),

$$r = 0 \quad \text{et} \quad v = \infty;$$

d'où je conclus que, pendant le temps fini T, le mobile a parcouru la spire infinie CH′KL′Q... O (n° 2), et que, par conséquent, ce point est arrivé au pôle O. Mais ce résultat a besoin d'être expliqué conformément à la première observation du n° 3. Pour cela, j'emploie la loi du mouvement rectiligne uniforme, d'après laquelle l'espace parcouru est exprimé par un produit de deux facteurs, qui sont la *vitesse* et le *temps*. Or, pourvu que le premier soit infini, le second restant fini, le produit n'en est pas moins infini et c'est en admettant que cette conséquence peut être attribuée à un mouvement variable quelconque que j'obtiens une interprétation qui me paraît suffisante pour le cas actuel.

2° Je vais encore avoir recours à l'induction pour déterminer la direction suivant laquelle le point matériel atteint et quitte le centre d'action. A cet effet, je remarque d'abord qu'à l'instant où ce mobile passe par le pôle, son rayon vecteur se réduit à un point; mais la Géométrie ne manque pas d'exemples de cas où une droite, joignant deux points réunis en un seul, n'en a pas moins une direction déterminée. Or ici les deux points dont il s'agit sont le mobile et le pôle que je considère comme la limite des nœuds (n° 2); d'ailleurs l'axe polaire est le rayon vecteur d'un nœud quelconque: si donc on admet que cette propriété a lieu jusqu'à la limite, il en résulte que la direction demandée est celle de l'axe polaire. Cela posé, je fais $r = 0$ dans l'équation (6), ce qui donne $\operatorname{tang}\delta = \infty$, par suite $\delta = \frac{\pi}{2}$: donc enfin le *mouvement* est dirigé suivant OY perpendiculaire à l'axe polaire OX. En outre, on peut s'assurer que cette loi, comme la première, satisfait à l'épreuve du n° 3. En effet, la valeur de la force motrice étant $\frac{K\gamma^3}{r^3}$, cette quantité devient infinie pour $r = 0$, d'où il résulte qu'à l'époque T le point matériel est retenu au pôle, par une résistance infinie; mais, comme il est animé d'une vitesse infiniment grande, la présence de cet élément de mouvement me paraît suffisante pour autoriser à admettre que la cause contraire est détruite.

3° Je fais $t = 2T$, ce qui donne, d'après les équations (4), (5), (6) et (7),

$$r = -\gamma, \quad \theta = \pi, \quad \operatorname{tang}\delta = -\frac{\pi}{2} = -\operatorname{tang}\alpha, \quad v = a.$$

Ces résultats expriment que, *après un second intervalle fini* T, *le mobile,* partant du point O avec sa vitesse infinie, *parcourt la seconde spire infinie* O...QLKHC, *pour revenir à son point de départ* C, où il reprend sa vitesse initiale a dirigée suivant la tangente à l'arc MC.

4° Le mobile, à son retour en C, se retrouve dans les conditions initiales du numéro précédent, d'après lesquelles il va mettre un temps infini à parcourir l'arc infini CF′ asymptotique à la droite BE′.

5° Dans cette seconde solution, la trajectoire est composée des deux spires réunies à l'arc CF′, c'est-à-dire de ce qui reste de la spirale hyperbolique totale, quand on en a retranché l'arc CF, trajectoire de la première solution.

Scolie I. — L'équation des aires donne

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{a\gamma \sin\alpha}{r^2};$$

au moyen de la formule (7), on peut donner à celle-ci la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma \sin\alpha}{\sqrt{r^2\cos^2\alpha + \gamma^2\sin^2\alpha}}\,\frac{v}{r}.$$

Ici le multiplicateur de $\frac{v}{r}$ devient l'unité pour $r = 0$; par conséquent, à cette limite, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r};$$

donc alors, la vitesse propre du mobile étant infinie, la vitesse angulaire de son rayon vecteur devient une grandeur infinie d'un ordre supérieur à v : d'où l'on peut conclure que le mobile atteint le pôle, non en glissant, mais en tournant une infinité de fois autour de ce point fixe.

Ces observations s'accordent avec les remarques d'après lesquelles la spirale, prise depuis le point C jusqu'au pôle, a un développement linéaire infini, tandis qu'elle n'enveloppe qu'une étendue superficielle finie, ce qui est une conséquence de la loi des aires donnée par la Mécanique.

Scolie II. — Ma solution, ainsi que le scolie précédent, obtiennent une sanction importante par le n° 236 de la Mécanique de Poisson, qui résout le même problème de Dynamique, dans le cas où la trajectoire, au lieu d'être une spirale hyperbolique, est la spirale représentée par l'équation

$$r = \frac{2\gamma}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \quad \text{(p. 453)}.$$

A la fin de la page précédente, l'auteur dit : « Le mobile décrira une spirale autour du pôle, et *atteindra* ce point après un nombre infini de révolutions. »

La solution se termine par une équation qu'on peut écrire sous la forme

$$t = \frac{\gamma}{n\sqrt{2gh}} \frac{1 - e^{-2n\theta}}{1 + e^{-2n\theta}},$$

pour $\theta = \infty$, la valeur de r devient nulle et celle de $t = \frac{\gamma}{n\sqrt{2gh}}$; donc le mobile arrive au pôle, après un temps fini et déterminé pendant lequel il a exécuté une infinité de circonvolutions autour de ce point. Cette dernière propriété est encore conforme au scolie précédent.

Outre ces deux équations déterminant θ et r en fonction de t, il faut en produire une troisième qui donne la valeur de la vitesse v : c'est celle qui résulte immédiatement du principe des forces vives

$$v^2 = 2gh\left[(n^2+1)\frac{\theta^2}{r^2} - n^2\right],$$

et l'on obtient ainsi la solution complète.

Ainsi voilà deux exemples d'un même problème de Dynamique dans lesquels les deux trajectoires sont différentes à cause de la différence des conditions initiales du mouvement, ce qui n'empêche pas l'identité des lois de ce mouvement déduites ou du moins résultant des deux solutions.

Scolie III. — Quand on discute, au seul point de vue de la Géométrie, l'équation de la spirale hyperbolique, on exprime sa propriété asymptotique par rapport au pôle, en disant que chaque spire fait une infinité de circonvolutions autour de ce point, sans *jamais* l'atteindre. Mais cet *adverbe de temps* doit être réformé dans le cas où la courbe dont il s'agit devient la trajectoire d'un mobile qui peut exécuter un nombre infini de révolutions pendant un temps fini, car la Mécanique n'est point ainsi en désaccord avec la Géométrie, donnant une équation qui est satisfaite par $r = 0$ et $\theta = \infty$.

J'ai annoncé, dans la Préface, que le résultat de mon étude peut provoquer des doutes et des objections. A ce sujet, il n'est peut-être pas sans intérêt de montrer comment peut en produire un article susceptible d'être traduit en paradoxe apparent, et de mettre cet article en regard d'un passage de la *Mécanique* de Poisson auquel on peut aussi attribuer un caractère paradoxal.

Dans le n° 5 de mon Mémoire, on trouve que :

« Un mobile met un *temps fini* à parcourir un *chemin infini* » ; au rebours de ce fait, le Traité de Poisson, p. 294, dit que :

« Un mobile met un *temps infini* à parcourir un *chemin fini*. » J'établis la première proposition par une induction que je crois être de bon aloi.

Quant à la seconde, Poisson se borne à l'exprimer; mais, s'il avait voulu la démontrer, il se serait aperçu qu'elle n'a pas toute la généralité qu'il lui attribue. Cependant, plus loin (n° **131**, p. 339), il prouve que, dans un cas particulier du mouvement d'un point pesant sur la circonférence d'un cercle vertical, le mobile met effectivement un *temps infini* à parcourir l'*arc fini* ABA'E. Pour donner un sens pratique à ce résultat, j'observe que, dans une position prise à volonté, le mobile est à une distance du point culminant E, exprimée par $\sqrt{2az}$. Or on peut donner à z une valeur qui rende cette distance moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit : donc, si l'on porte cette valeur de z dans la formule qui exprime t en fonction de z, on connaîtra la durée du temps que le mobile emploiera à approcher, autant que l'on voudra, de la fin de son trajet; et l'on obtiendra ainsi une solution approximative, tout aussi valable que celle dont il faut bien se contenter quand on rencontre un nombre incommensurable tel que π, e, ou l'inconnue d'une équation de degré supérieur, etc.