BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 44-51

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__44_1>

Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce; par M. Goursat.

(Séance du 17 février 1882.)

1. Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 28 avril 1879, M. Picard a montré que toute fonction multiforme de la variable complexe x, n'ayant, dans toute l'étendue du plan ou de la sphère, que trois points singuliers, le point $x = 0$, le point $x = 1$ et le point à l'infini, pouvait être considérée comme une fonction uniforme du rapport $\omega = \frac{iK'}{K}$; K et K' sont définis,

pour des valeurs quelconques de x, par l'équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle ils satisfont (FUCHS, *Journal de Borchardt*, t. 71)

$$(1) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-2x)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}y=0.$$

La fonction ω de la variable x, ainsi définie, n'a, dans toute l'étendue du plan, que les trois points critiques 0, 1, ∞, et jouit des propriétés suivantes : pour toute valeur de x, le coefficient de i dans ω, mis sous la forme ordinaire des imaginaires, est positif ; de plus, si l'on part d'un point A du plan avec une valeur initiale ω_0, et que l'on fasse décrire à la variable x un chemin fermé quelconque, ne passant par aucun des points 0 et 1, on revient au point de départ avec une valeur $\frac{a\omega_0+b}{c\omega_0+d}$, a, b, c, d étant quatre entiers réels satisfaisant à la condition $ad-bc=1$. En s'appuyant sur les propriétés précédentes, il est aisé de démontrer que, si le chemin décrit par la variable x ne peut être réduit au point A sans franchir aucun des points 0 et 1, la fonction ω ne reviendra jamais à la valeur initiale. Je renverrai, pour la démonstration, au Mémoire de M. Picard (*Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*, t. IX, p. 149). Il en résulte qu'il y a un seul chemin pour la variable x qui conduit de la valeur ω_0 à la valeur $\frac{a\omega_0+b}{c\omega_0+d}$, en regardant comme identiques tous les chemins qui peuvent être réduits à l'un d'entre eux, sans franchir aucun des points 0 et 1.

2. Il m'a paru intéressant de chercher à démontrer cette propriété, en m'appuyant uniquement sur la manière dont se permutent les intégrales de l'équation (1) dans le voisinage de l'un des points critiques.

Posons

$$\varphi(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots2m}\right]^2x^m,$$

$$\psi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots2m}\right]^2 B_m x^m,$$

$$B_m=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2m}.$$

Dans le domaine du point $x=0$, l'équation (1) admet les deux intégrales

$$P = \varphi(x),$$
$$Q = 4\psi(x) + \varphi(x)\log x.$$

De même, dans le domaine du point $x = 1$, elle admet les deux intégrales

$$P' = \varphi(1-x),$$
$$Q' = \varphi(1-x)\log(1-x) + 4\psi(1-x).$$

Je prendrai pour valeurs initiales $K = \varphi(x)$, $K' = \varphi(1-x)$; K et K' seront des fonctions uniformes de x dans toute l'étendue du plan, pourvu que le chemin suivi par la variable soit assujetti à ne couper aucune des lignes indéfinies $-\infty \ldots 0$, $1 \ldots +\infty$. J'adopterai de même, comme valeur initiale de ω, la valeur $\omega_0 = \frac{i\varphi(x)}{\varphi(1-x)}$; ω_0 sera une fonction uniforme de x à la même condition que K et K'. Voyons maintenant ce que devient ω_0, quand on fait décrire à la variable x un lacet autour de l'un des points critiques dans un sens ou dans l'autre. Entre les quatre intégrales P, Q, P', Q', on a, dans la partie commune aux deux domaines, les relations

$$P' = \frac{4\log 2}{\pi} P - \frac{1}{\pi} Q,$$
$$P = \frac{4\log 2}{\pi} P' - \frac{1}{\pi} Q'.$$

Par un lacet décrit autour du point $x = 0$ dans le sens direct, Q se change en $Q + 2i\pi P$; par suite, P' se change en $P' - 2iP$. La valeur du rapport ω, après ce chemin, sera donc

$$\frac{i(P' - 2iP)}{P} = \omega_0 + 2.$$

Par un lacet décrit autour du même point critique dans le sens rétrograde, ω_0 se changerait en $\omega_0 - 2$. De même, par un lacet décrit autour du point $x = 1$, $\frac{1}{\omega_0}$ se change en $\frac{1}{\omega_0} \mp 2$, suivant que ce lacet est décrit dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

3. Cela posé, comme tout chemin fermé se ramène à une suite de lacets décrits autour des points 0 et 1 dans un sens ou dans l'autre, il est clair que nous n'avons qu'à étudier les valeurs que

l'on déduit de la valeur ω_0, en appliquant les substitutions précédentes un nombre quelconque de fois et dans un ordre arbitraire. On voit d'abord que l'on est conduit à un nombre infini de valeurs différentes, qui sont toutes de la forme $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, a, b, c, d étant quatre entiers réels, tels que $ad - bc = 1$. Si l'on est arrivé, après un certain nombre de lacets, à la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, un nouveau lacet, décrit autour du point $x = 0$, conduira à l'une des valeurs

$$\frac{a\omega_0 + b + 2a}{c\omega_0 + d + 2c}, \quad \frac{a\omega_0 + b - 2a}{c\omega_0 + d - 2c};$$

un lacet décrit autour du point $x = 1$ conduirait à l'une des deux valeurs

$$\frac{(a + 2b)\omega_0 + b}{(c + 2d)\omega_0 + d}, \quad \frac{(a - 2b)\omega_0 + b}{(c - 2d)\omega_0 + d}.$$

Le théorème qu'il s'agit de démontrer peut s'énoncer ainsi :

Il n'y a qu'une suite de substitutions de la forme précédente, appliquées dans un ordre déterminé, qui conduise de la valeur ω_0 *à une quelconque des valeurs que peut prendre la fonction* ω *pour la même valeur de la variable.*

4. Pour abréger, j'appellerai valeurs *voisines* de ω des valeurs telles, que l'on passe de l'une à l'autre, en faisant décrire à la variable un lacet unique autour de l'un des points critiques. Les quatre valeurs voisines de la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$ sont les quatre valeurs écrites plus haut. J'appelle A la somme toujours positive $(a + c)^2 + (b + d)^2$; c'est l'étude de la variation de cette somme, quand on passe d'une valeur de ω à une valeur voisine, qui m'a permis de démontrer le théorème en question.

Considérons la somme A relative à une valeur particulière de ω, et les sommes analogues relatives aux valeurs voisines, que je désignerai par A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}. On aura

$$\begin{aligned}
A &= (a + c)^2 + (b + d)^2,\\
A_1 &= (a + c)^2 + (b + d + 2a + 2c)^2,\\
A_{-1} &= (a + c)^2 + (b + d - 2a - 2c)^2,\\
A_2 &= (a + c + 2b + 2d)^2 + (b + d)^2,\\
A_{-2} &= (a + c - 2b - 2d)^2 + (b + d)^2.
\end{aligned}$$

Posons encore

$$D_1 = A_1 - A, \quad D_{-1} = A_{-1} - A,$$
$$D_2 = A_2 - A, \quad D_{-2} = A_{-2} - A;$$

on a

$$D_1 = 4(a+c)(a+c+b+d),$$
$$D_{-1} = 4(a+c)(a+c-b-d),$$
$$D_2 = 4(b+d)(a+c+b+d),$$
$$D_{-2} = 4(b+d)(b+d-a-c),$$

et enfin

$$\Delta_1 = D_1 D_{-1} = 16(a+c)^2[(a+c)^2-(b+d)^2],$$
$$\Delta_2 = D_2 D_{-2} = 16(b+d)^2[(b+d)^2-(a+c)^2].$$

Je distinguerai maintenant plusieurs cas :

Premier cas. — Soit $a+c \neq 0$, $b+d \neq 0$, $(a+c)^2 \neq (b+d)^2$.

Les deux nombres Δ_1, Δ_2 sont différents de zéro et de signes contraires. Supposons, par exemple, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$; le produit $D_1 D_{-1}$ est positif, ainsi que la somme $D_1 + D_{-1} = 8(a+c)^2$; les deux nombres D_1, D_{-1} sont donc positifs. Le produit $D_2 D_{-2}$ étant négatif, l'un des deux nombres D_2, D_{-2} est positif, l'autre négatif. Donc, *des quatre nombres* D_1, D_{-1}, D_2, D_{-2}, *trois sont positifs, un seul est négatif.*

Deuxième cas. — Soit $a+c \neq 0$, $(a+c)^2 = (b+d)^2$.

On aura $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Comme la somme $D_1 + D_{-1}$ est encore positive, l'un des deux nombres D_1, D_{-1} sera nul, l'autre positif. Il en sera de même des deux nombres D_2, D_{-2}. Ainsi, *des quatre nombres* D_1, D_{-1}, D_2, D_{-2}, *deux seront nuls, deux positifs.*

Troisième cas. — Soit $a+c=0$, $b+d \neq 0$.

Les deux nombres D_1, D_{-1} seront nuls ; D_2, D_{-2} seront positifs. D'où la même conclusion que dans le cas précédent. On arriverait encore à la même conclusion en supposant $a+c \neq 0$, $b+d=0$.

On ne peut supposer à la fois $a+c=0$, $b+d=0$, car la fraction $\frac{a\omega+b}{c\omega+d}$ se réduirait à -1.

En résumé, des quatre nombres D_1, D_{-1}, D_2, D_{-2}, relatifs à une valeur quelconque de ω, ou bien trois seront positifs et un seul négatif, ou bien deux seront nuls, les deux autres étant positifs.

Quand on passera d'une valeur de ω à l'une des quatre valeurs voisines, deux cas seulement pourront se présenter. Dans le premier cas, la somme A est plus grande pour trois des valeurs voisines que pour la valeur proposée, et plus petite pour une seule. Dans le second cas, elle reste la même pour deux des valeurs voisines, et va en augmentant pour les deux autres.

5. Supposons maintenant que l'on parte de la valeur ω_0, ce qui revient à supposer $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$. On a $A = 2$, et, comme $a + c = b + d = 1$, on se trouve placé dans le second cas. Il y aura donc deux valeurs voisines de la valeur ω_0 pour lesquelles A sera encore égal à 2 ; ce sont les valeurs

$$\frac{\omega_0}{-2\omega_0+1}, \quad \frac{\omega_0-2}{1};$$

si nous partons de la valeur $\frac{\omega_0-2}{1}$, nous nous trouvons encore dans le second cas, et l'on en déduit une nouvelle valeur $\frac{-3\omega_0-2}{2\omega_0+1}$, pour laquelle on a encore $A = 2$. En continuant ainsi, et en opérant de même avec la valeur $\frac{-\omega_0}{-2\omega_0+1}$, on arrivera à former une série linéaire, illimitée dans les deux sens, de valeurs telles que la somme correspondante A est égale à 2 :

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} \ldots, \quad \frac{-3\omega_0-4}{4\omega_0+5}, \quad \frac{-3\omega_0+2}{4\omega_0-3}, \quad \frac{\omega_0+2}{-2\omega_0-3}, \quad \frac{\omega_0}{-2\omega_0+1}, \\ \frac{\omega_0}{1}, \quad \frac{\omega_0-2}{1}, \quad \frac{-3\omega_0-2}{2\omega_0+1}, \quad \frac{-3\omega_0+4}{2\omega_0-3}, \quad \frac{5\omega_0+4}{-4\omega_0-3}, \\ \qquad \frac{5\omega_0-6}{-4\omega_0+5}, \quad \frac{7\omega_0-6}{-6\omega_0+5}, \quad \ldots . \end{array} \right.$$

Prenons maintenant l'une quelconque v de ces valeurs ; outre les deux valeurs voisines de v qui font partie de cette série, il y en a deux autres pour lesquelles la somme A est plus grande que 2. Soit v_1 l'une d'elles ; quand on passe de v à v_1, la somme A va en augmentant. Si de v_1 on passe à une nouvelle valeur voisine v_2, A ira encore en augmentant, car on se trouve placé dans le premier cas, et il n'y aurait qu'un moyen de faire diminuer A : ce serait de repasser à la valeur v. Si de v_2 on passe à une nouvelle valeur

v_3, A ira encore en augmentant, pour la même raison que tout à l'heure. Et le raisonnement s'appliquant de proche en proche, on voit que, pourvu qu'on n'applique pas deux substitutions inverses l'une de l'autre successivement, A ira toujours en augmentant.

Considérons un chemin fermé conduisant de la valeur ω_0 à une valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, et supposons-le remplacé par un certain nombre de lacets. Imaginons en même temps la suite des valeurs par lesquelles on passe pour arriver de ω_0 à $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$; cette suite se composera d'un certain nombre de valeurs comprises dans la série précédente (ce nombre pouvant être l'unité), suivie d'un certain nombre de valeurs qui ne seront pas comprises dans la série. Comme on peut toujours supposer qu'on ne rencontre pas deux lacets parcourus successivement dans des sens contraires, d'après ce qu'on a vu tout à l'heure, *la somme* A *ne va jamais en diminuant quand on passe d'une valeur à la valeur suivante.*

Inversement, supposons que l'on remonte la suite des lacets qui a conduit de la valeur ω_0 à la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$; on repassera par toutes les valeurs intermédiaires, mais dans l'ordre inverse. Donc, *quand on remonte de la valeur finale à la valeur initiale* ω_0, *la somme* A *ne va jamais en augmentant quand on passe d'une valeur à la suivante.*

Il y aura maintenant deux cas à distinguer :

Premier cas. — La valeur finale $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$ fait partie de la série illimitée écrite plus haut. Il est clair que toutes les valeurs intermédiaires devront faire partie de la même série ; ce seront précisément les valeurs comprises entre ω_0 et $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$ dans cette série. La suite des lacets, qui ramène de la valeur finale à la valeur initiale, est donc complètement déterminée.

Deuxième cas. — La valeur finale ne fait pas partie de la série (2). Soit v_p cette valeur ; parmi les valeurs voisines, il y en aura une seule pour laquelle A sera moindre que pour v_p. Soit v_{p-1} cette valeur ; d'après ce qu'on vient de voir, v_{p-1} sera la valeur précédant immédiatement v_p. Si v_{p-1} fait partie de la série écrite plus haut, on est ramené au cas précédent; dans le cas contraire, en opérant sur v_{p-1} comme on a opéré sur v_p, on en déduira une autre valeur v_{p-2} qui précédera v_{p-1}.... En continuant ainsi, comme A va toujours en diminuant, on finira par arriver à une valeur v_2, à partir de laquelle A ne pourra plus diminuer. Cette valeur fera partie de la série (2), et l'on sera ramené au cas précédent.

On voit donc que la suite des lacets qui ramène de la valeur $\frac{a\omega_0+b}{c\omega_0+d}$ à la valeur ω_0 est complètement déterminée; et, par suite, il en est de même du chemin inverse. C. Q. F. D.

6. J'ajouterai seulement les remarques suivantes :

Remarque I. — Toutes les valeurs que l'on déduit de la valeur ω_0 sont de la forme $\frac{a\omega_0+b}{c\omega_0+d}$, où a, b, c, d sont quatre entiers réels vérifiant la relation $ad-bc=1$. Mais on n'obtient pas ainsi toutes les valeurs de cette forme ; ainsi, quel que soit le chemin suivi par la variable, on ne parviendra jamais à la valeur $\frac{-1}{\omega_0}$; car, si l'on arrivait à cette valeur, elle devrait faire partie de la série (I), et il est aisé de s'assurer qu'elle n'est pas comprise dans cette série.

Remarque II. — Considérons les quatre substitutions suivantes :

$$S^1=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix},\quad S^{-1}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix},\quad T^1=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix},\quad T^{-1}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix};$$

il résulte de ce qui précède qu'il n'existe aucune substitution composée des substitutions S et T, telle que

$$S^p T^q S^{p_1} T^{q_1} \ldots S^{p_n} T^{q_n},$$

qui se réduise à la substitution identique $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$, à moins de supposer nuls tous les nombres p et tous les nombres q. Au moyen des substitutions S et T, il sera facile de composer des groupes d'un nombre quelconque de substitutions jouissant de la même propriété.