BULLETIN DE LA S. M. F.

WEILL

Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 55-58

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__55_1>

Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier; par M. Weill.

(Séance du 3 février 1882.)

Soit un triangle ABC, dans lequel B est égal à $(n+1)$ fois l'angle A, désignons par a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} ses côtés; si nous menons une droite BD faisant avec BA un angle égal à $\widehat{A}$, le triangle BDE, formé en menant DE parallèle à AB, aura un angle $\widehat{DBE}$ qui vaudra n fois l'angle $\widehat{EDB}$; si l'on désigne par a_n, b_n, c_n les côtés de ce nouveau triangle, et par λ le rapport des côtés du triangle CDE au triangle CAB auquel il est semblable, on trouve facilement les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n+1}(1+\lambda),\\
b_n &= c_{n+1}\lambda,\\
c_n &= b_{n+1}(1+\lambda),\\
\lambda &= \frac{b_n^2}{b_n^2+c_n^2-a_n^2}.
\end{aligned}$$

La dernière formule s'obtient en calculant la longueur de DE, bissectrice de l'angle D, dans le triangle CDB.

Ceci posé, si a_n, b_n, c_n représentent des nombres entiers, les formules précédentes donnent pour a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} des valeurs commensurables, qui sont

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{a_n(b_n^2+c_n^2-a_n^2)}{c_n^2-a_n^2},\\
b_{n+1} &= \frac{c_n(b_n^2+c_n^2-a_n^2)}{c_n^2-a_n^2},\\
c_{n+1} &= \frac{b_n(b_n^2+c_n^2-a_n^2)}{b_n^2}.
\end{aligned}$$

Nous supposons b_n, c_n et a_n premiers entre eux et nous voulons trouver pour b_{n+1}, a_{n+1}, c_{n+1} des nombres entiers premiers entre eux ; d'après cela, nous pouvons déjà adopter les valeurs entières

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{n+1} = c_n b_n, \\ b_{n+1} = c_n b_n, \\ c_{n+1} = c_n^2 - a_n^2. \end{cases}$$

Or un calcul direct, très facile, donne les formules qui conviennent à $n = 2$ et à $n = 3$, et l'on trouve, en désignant par q et p deux nombres entiers premiers entre eux,

$$\begin{aligned} a_2 &= q^2, & a_3 &= q^3, \\ b_2 &= qp, & b_3 &= c_2 q, \\ c_2 &= p^2 - q^2. \end{aligned}$$

Admettons la généralité de la loi, c'est-à-dire supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= q^n q, \\ b_{n+1} &= c_n q, \\ c_{n+1} &= \frac{c_n^2 - a_n^2}{c_{n-1}}. \end{aligned}$$

Ces formules ne sont autres que les formules (1), après que l'on a divisé les seconds membres par le nombre entier $\frac{b_n}{q} = c_{n-1}$; elles représenteront des nombres entiers premiers entre eux, pourvu que l'expression de c_{n+1} représente un nombre entier, et que les deux nombres b_n et $(b_n^2 - a_n^2)$ ne puissent avoir d'autre facteur commun que $\frac{b_n}{q}$; ce dernier point est évident, car les quotients de b_n et de $(c_n^2 - a_n^2)$ par $\frac{b_n}{q}$ ne pourraient avoir de facteur premier commum qu'un facteur premier de q, qui diviserait $c_n^2 - a_n^2$, et, par suite, diviserait à la fois c_n, a_n et b_n, puisque a_n et b_n sont multiples de q.

Reste à prouver que l'expression de c_{n+1} représente un nombre entier. Pour cela, partons d'un triangle isoscèle ayant pour côtés q et p, et dont φ est l'angle à la base, on aura $\cos\varphi = \frac{p}{2q}$; si cet angle φ appartient à tous les triangles dont nous parlons, et y est opposé au côté a, on aura

$$\frac{a_{n-1}}{\sin\varphi} = \frac{b_{n-1}}{\sin(n-1)\varphi} = \frac{c_{n-1}}{\sin n\varphi}.$$

Or on a

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = 2^{n-1}\cos^{n-1}\varphi - 2^{n-3}\frac{(n-2)}{1}\cos^{n-3}\varphi + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} = 2^{n-1}\frac{p^{n-1}}{2^{n-1}q^{n-1}} - \ldots.$$

Donc, si l'on prend pour a_{n-1} le nombre entier q^{n-1}, l'expression correspondante de c_{n-1} sera un nombre entier. Donc enfin, les formules générales qui résolvent la question, en nombres entiers premiers entre eux, sont

$$a_n = q^n,$$
$$b_n = c_{n-1}q,$$
$$c_n = \frac{c_{n-1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}} = p^n - \frac{n-1}{1}p^{n-2}q^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}p^{n-4}q^4 + \ldots.$$

On a, d'ailleurs, $q < p < 2q$.

L'analyse précédente prouve que les seules solutions de la question, en nombres entiers premiers entre eux, sont celles dans lesquelles a_n est la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre entier; elle démontre en outre que, si l'on considère la suite,

$$\begin{array}{lll} a_1 = q, & a_2 = q^2, & a_3 = q^3, \\ b_1 = q, & b_2 = qp, & b_3 = qc_2, \\ c_1 = p, & c_2 = p^2 - q^2, & c_3 = \dfrac{c_2^2 - q^4}{c_1}; \end{array}$$
$$a_n = q^n,$$
$$b_n = qc_{n-1},$$
$$c_n = \frac{c_{n+1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}},$$

les quantités c_n divisent algébriquement les quantités

$$(c_{n+1}^2 - q^{2n+2}).$$

Parmi les triangles répondant à la question, il en existe dans lesquels les nombres entiers qui représentent les trois côtés sont consécutifs.

Lorsque l'un des angles doit être double de l'autre, on trouve facilement que le seul triangle est celui dont les côtés sont représentés par les nombres 4, 5, 6. D'après cela, soit un triangle général, dans lequel les côtés soient représentés par trois entiers consécutifs; une première hypothèse à examiner est la suivante :

$$a_n = q^n,$$
$$b_n = c_{n-i} q = q^n + 1,$$
$$c_n = \frac{c_{n-1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}} = q^n + 2.$$

On en déduit

$$q^2(q^n + 2)c_{n-2} = 2q^n + 1,$$

et n est au moins égal à 3, car nous avons parlé du cas de $n = 1$ et $n = 2$: donc c_{n-2} existe et est au moins égal à 1; l'égalité précédente est alors impossible, à moins de faire $q = 1$, ce qui ne donne pas de véritable triangle. Reste à examiner la deuxième hypothèse,

$$a_n = q^n,$$
$$b^n = q^n + 2,$$
$$c_n = q^n + 1;$$

on en tire $c_{n-2} = \frac{4}{q^2}$, ce qui exige $q = 2$ et $c_{n-2} = 1$; cette dernière relation exige $n = 2$, car, si n était supérieur à 2, c_{n-2} serait plus grand que 1; cela est impossible, parce que si n est, par exemple, égal à 3, c_1 serait égal à 1, et a_1 et b_1 seraient supérieurs à c_1.

Donc, enfin, le seul triangle dont les côtés soient représentés par 3 entiers consécutifs, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier, est celui qui a un angle double d'un autre, et dont les côtés sont représentés par les nombre 4, 5, 6. Dans le cas général, il faut remarquer que c_n doit avoir une valeur positive; il faut donc que l'on ait

$$c_{n-1} > q^{n-1}.$$

Si donc on a choisi pour q un nombre entier quelconque, il faut prendre pour p un nombre entier premier avec q, plus petit que $2q$ et, en outre, plus grand que mq, m étant un nombre qui dépend de la valeur de n que l'on considère. Nous donnons les formules relatives à $n = 2, 3, 4, 5$,

$$a_2 = q^2, \quad b_2 = qp, \quad c_2 = p^2 - q^2,$$
$$a_3 = q^3, \quad b_3 = q(p^2 - q^2), \quad c_3 = p(p^2 - 2q^2),$$
$$a_4 = q^4, \quad b_4 = qp(p^2 - 2q^2), \quad c_4 = (p^2 - pq - q^2)(p^2 - q^2 + pq),$$
$$a_5 = q^5, \quad b_5 = q(p^2 - pq - q^2)(p^2 - q^2 + pq), \quad c_5 = p(p^2 - q^2)(p^2 - 3q^2).$$