Bulletin de la S. M. F.

Tchebicheff

Sur les fractions algébriques qui représentent approximativement la racine carrée d'une variable, comprise entre les limites données

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 167-168

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__167_1>

Sur les fractions algébriques qui représentent approximativement la racine carrée d'une variable, comprise entre les limites données; par M. TCHEBICHEFF.

(Séance du 21 novembre 1884.)

Quand on cherche parmi toutes les fractions de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

$f(x)$, $F(x)$ n'étant pas d'un degré supérieur à n, celle dont le logarithme, depuis $x = \frac{1}{a} < 1$ jusqu'à $x = a > 1$, s'écarte le moins du logarithme de $\sqrt{x}$, on trouve une fraction qui peut être présentée de la manière suivante :

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{x^m \varphi\left(\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right) \varphi\left(-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)}{\varphi(\sqrt{1-ax})\,\varphi(-\sqrt{1-ax})},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction d'un degré m, qui, à un facteur constant près (tout à fait arbitraire), peut être déterminée à l'aide de cette équation

$$x^m \frac{\left(1+\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)\varphi^2\left(\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right) + \left(1-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)\varphi^2\left(-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)}{\varphi(\sqrt{1-ax})\,\varphi(-\sqrt{1-ax})} = \text{const.}$$

Ainsi, en prenant $m = 1$, on trouve, pour l'expression approximative de $\sqrt{x}$ entre $x = \frac{1}{a}$, $x = a$, la fraction

$$\frac{kx+1}{x+k},$$

où k est une constante dont la valeur est donnée par l'équation

$$k^4 - 6k^2 - 4\left(a + \frac{1}{a}\right)k - 3 = 0$$

et d'où, en posant

$$x = \frac{Z}{\sqrt{AB}}, \quad a = \sqrt{\frac{A}{B}},$$

on tire, pour l'expression approximative de $\sqrt{Z}$ entre $Z = A$, $Z = B$, cette formule

$$\sqrt[4]{AB}\,\frac{kZ + \sqrt{AB}}{Z + k\sqrt{AB}}.$$