MAURICE D'OCAGNE

Sur certaines figures minima

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 168-177
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__168_1>

Sur certaines figures minima; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 21 novembre 1884).

1. Les problèmes suivants nous sont venus à l'idée à propos de certaines questions que nous avons rencontrées dans la pratique; ils sont susceptibles de nombreuses applications.

Ils consistent en la recherche du minimum de certaines fonctions essentiellement discontinues, dont, par conséquent, les variations ne peuvent être étudiées au moyen de la théorie des dérivées. Nous les traitons par une méthode géométrique, qui exige quelques définitions et explications préliminaires, sous peine de se traduire par des phrases trop longues et trop compliquées. C'est par ces explications que nous débuterons.

I.

2. Étant donné un système de points quelconques dans un plan, on peut toujours former, et cela d'une seule manière, un polygone *convexe* ayant pour sommets certains d'entre les points du système, et renfermant tous les autres points.

Nous appellerons les points qui constituent les sommets de ce polygone les *sommets* du système; les autres seront les *points intérieurs*.

3. Étant donnés deux points A_1 et A_2, la droite élevée perpendiculairement à A_1A_2 par le milieu de ce segment, droite que nous représenterons par ${}_{A_1}D_{A_2}$, détermine dans le plan deux régions, l'une (A_1), dans laquelle tous les points sont plus rapprochés de A_1 que de A_2, l'autre (A_2) où c'est l'inverse qui a lieu.

Prenons alors un système de points $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Les droites ${}_{A_1}D_{A_2}, {}_{A_1}D_{A_3}, \ldots, {}_{A_1}D_{A_m}$ déterminent chacune une région (A_1), et respectivement des régions $(A_2), (A_3), \ldots, (A_m)$.

Toutes ces régions (A_1) ont en commun une certaine région $r(A_1)$ limitée par un contour polygonal convexe que nous représenterons par $c(A_1)$, et dont les côtés sont des segments de certaines d'entre les droites ${}_{A_1}D_{A_2}, {}_{A_2}D_{A_3}, \ldots, {}_{A_1}D_{A_m}$. Si le point A_1 est un sommet du système, le contour $c(A_1)$ est *ouvert;* si c'est un point intérieur, $c(A_1)$ est *fermé.*

Quant aux régions $(A_2), (A_3), \ldots, (A_m)$, elles ont une partie commune si A_1 est un sommet du système, et n'en ont pas si A_1 est un point intérieur. Dans le premier cas, nous représenterons la région commune par $R(A_1)$, et le contour qui la limite par $C(A_1)$; ce contour polygonal est convexe et ouvert; ses côtés appartiennent à celles des droites ${}_{A_1}D_{A_2}, {}_{A_1}D_{A_3}, \ldots, {}_{A_1}D_{A_m}$ qui proviennent de la combinaison du point A_1 avec un autre sommet du système, et même, en général, à un certain nombre seulement de celles-ci.

Ainsi, dans tous les cas, la région $R(A_1)$ comprend toute la portion du plan où les points sont plus éloignés du point A_1 que de tout autre point du système, et la région $r(A_1)$ toute la portion du plan où les points sont plus rapprochés du point A_1 que de tout autre point du système.

II.

4. Nous allons maintenant aborder le premier des problèmes que nous avons en vue, et qui est le suivant :

Trouver le cercle minimum renfermant un système de points donnés dans un plan (1).

Il est d'abord évident qu'il n'y a lieu de faire intervenir dans la solution que les sommets du système. De plus, le cercle cherché passant forcément au moins par un de ces sommets, on voit que le problème revient à déterminer, pour chacun des sommets, le cercle minimum passant par ce sommet et renfermant tous les autres, et à choisir parmi les cercles ainsi obtenus celui qui a le plus petit rayon.

Or, pour un de ces sommets pris en particulier, A_1 par exemple, le centre du cercle minimum correspondant est le point de la région $R(A_1)$ qui est le plus rapproché du point A_1. Ce point se trouve évidemment sur le contour $C(A_1)$. Mais ici deux cas peuvent se présenter.

5. Le premier cas, le moins fréquent, est celui où il existe, parmi les sommets, un point, A_2 par exemple, tel que, de tout autre sommet, le segment de droite A_1A_2 soit vu sous un angle obtus.

---

(1) On aura à résoudre ce problème dans la pratique toutes les fois qu'il s'agira de trouver un point situé à la plus grande proximité possible d'un système de points donnés, c'est-à-dire tel que la plus grande des distances rectilignes à parcourir pour aller de ce point aux divers points du système soit la plus petite possible.

Dans ce cas, les droites ${}_{A_1}D_{A_3}$, ${}_{A_1}D_{A_4}$, ... coupent toutes A_1A_2 entre le point A_1 et le milieu M de A_1A_2. Par suite, le contour $C(A_1)$ comprend un segment de la droite ${}_{A_1}D_{A_2}$, *contenant le point* M, et des segments des droites ${}_{A_1}D_{A_3}$, ${}_{A_1}D_{A_4}$, ... situés tous de l'autre côté du point A_1 par rapport à la droite ${}_{A_1}D_{A_2}$. De là ressort nettement que le point du contour $C(A_1)$, qui est le plus rapproché du point A_1, est le point M. Le cercle minimum correspondant au point A_1 est alors le cercle décrit sur A_1A_2 comme diamètre; de même pour le point A_2. Nous ajoutons que ce cercle est *absolument* le cercle minimum renfermant le système donné.

En effet, prenons un autre sommet du système, A_i par exemple. Les droites ${}_{A_i}D_{A_1}$ et ${}_{A_i}D_{A_2}$ se coupent en I. Le centre du cercle minimum correspondant au point A_i, s'il n'est pas le point I, est un point situé dans l'angle formé par les droites ${}_{A_i}D_{A_1}$, ${}_{A_i}D_{A_2}$, et opposé à l'angle qui renferme le point A_i; par suite, le rayon de ce cercle minimum est au moins égal à IA_i. Or le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle $A_iA_1A_2$; la demi-corde $\frac{A_1A_2}{2}$ de ce cercle est inférieure à son rayon IA_i; donc le rayon du cercle minimum correspondant à un sommet A_i quelconque est plus grand que le rayon $\frac{A_1A_2}{2}$ du cercle minimum correspondant aux points A_1 et A_2; et, conséquemment, c'est bien ce dernier qui est, d'une manière absolue, le cercle minimum renfermant le système proposé. Donc :

Théorème. — *Si un polygone convexe de m sommets est tel que, de m — 2 de ses sommets, on voie la diagonale qui joint les deux derniers sous des angles obtus, le cercle minimum renfermant ce polygone est celui qui est décrit sur cette diagonale comme diamètre.*

6. Passons au second cas, qui se produit le plus souvent, celui où la condition, énoncée dans le théorème ci-dessus, n'est pas remplie.

Dans ce cas, le point du contour $C(A_1)$, qui est le plus rapproché du point A_1, est un sommet de ce contour; le cercle minimum correspondant est celui qui est décrit de ce point H_1 comme centre avec H_1A_1 pour rayon. Le point H_1 étant à la rencontre de deux droites, telles que ${}_{A_1}D_{A_h}$ et ${}_{A_1}D_{A_k}$, ce cercle passe, en outre du point A_1, par deux autres sommets A_h et A_k du système.

De même le point A_2 donne le point H_2, le point A_3 donne le point H_3, ... On voit quelle est la plus petite des longueurs A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, ...; le cercle minimum correspondant est, d'une manière absolue, le cercle minimum renfermant le système proposé.

Plusieurs de ces longueurs peuvent être égales, tout en étant plus grandes que chacune des autres; il y a alors plusieurs solutions.

7. Nous allons maintenant restreindre l'énoncé du problème en imposant au cercle *la condition d'avoir son centre sur une droite donnée* Δ.

La solution ne présente pas plus de difficulté.

Prenons un des sommets, A_1 par exemple; la droite Δ coupe le contour $c(A_1)$ en deux points p et q. Si la projection a_1 du point A_1 sur la droite Δ est située entre les points p et q, le cercle minimum correspondant est celui qui est décrit de a_1 comme centre avec a_1A_1 pour rayon, sinon il faut prendre celui des points p et q qui est le plus près du point a_1. On a de cette manière, comme précédemment, un cercle minimum correspondant à chaque sommet du système. On prend celui de ces cercles qui a le plus petit rayon.

III.

8. Le problème que nous allons traiter maintenant est le suivant :

Trouver la couronne circulaire d'épaisseur minima qui renferme un système de points donnés dans un plan (1).

(1) On aura à résoudre ce problème, dans la pratique, toutes les fois qu'on voudra trouver un point tel que la différence, entre la plus grande et la plus petite des distances rectilignes à parcourir pour aller de ce point à divers points donnés, soit minima. Ce point peut être considéré comme étant *le plus près d'être équidistant* des divers points donnés. Il faut remarquer que la solution du problème conduit parfois à un résultat qui n'a pas de sens dans la pratique: c'est lorsque le centre de la couronne minima est rejeté à l'infini. Mais on peut imposer à ce centre la condition d'être à l'intérieur d'une aire donnée; il n'en résulte, pour la solution, qu'une très légère modification, comme nous le ferons voir.

Il est bien évident que les cercles intérieur et extérieur qui limitent cette couronne doivent passer chacun au moins par un des points du système, et que, de plus, le cercle extérieur ne saurait passer que par des sommets de ce système.

La marche à suivre pour la solution sera donc (en supposant que le système contienne m points dont p sommets) la suivante : prendre successivement chacun des p sommets avec chacun des $m - 1$ autres points du système et déterminer chaque fois la couronne d'épaisseur minima dont le cercle extérieur passe par le sommet considéré, et le cercle intérieur par le second point (sommet ou point intérieur). On prendra ensuite, parmi toutes les couronnes ainsi déterminées, celle qui a la plus petite épaisseur.

Dès lors la solution sera complète, quand nous aurons résolu le problème suivant, qui va maintenant nous occuper :

Étant pris dans le système un sommet A_1 *et un point quelconque* A_2, *trouver la couronne circulaire d'épaisseur minima renfermant tout le système et telle que son cercle extérieur passe par* A_1, *son cercle intérieur par* A_2.

Le centre de la couronne cherchée devant évidemment se trouver à la fois dans la région $R(A_1)$ et dans la région $r(A_2)$ sera dans la partie commune à ces deux régions. Cette partie commune ρ (¹) est limitée par un contour polygonal γ, comprenant à la fois des éléments du contour $C(A_1)$ et du contour $c(A_2)$, et qui est situé tout entier du même côté que le point A_2 par rapport à la droite ${}_{A_1}D_{A_2}$.

D'ailleurs, M étant un point quelconque pris à l'intérieur de la région ρ, la droite A_1M vient couper le contour γ en un point m, et l'on a

$$A_2m > A_2M - Mm$$

et, par suite,

$$A_1m - A_2m < A_1m - A_2M + Mm$$

ou

$$A_1m - A_2m < A_1M - A_2M.$$

(¹) Si l'on veut, comme nous le disions dans la Note précédente, que le centre de la couronne minima soit situé à l'intérieur d'une aire donnée, on ne prendra que la partie de la région ρ, qui lui est commune avec cette aire.

De là cette conséquence, à savoir que le centre de la couronne cherchée est sur la portion du contour γ la plus rapprochée du point A_1, à l'intérieur de l'angle sous lequel on voit ce contour du point A_1.

Nous voilà donc amenés, en dernière analyse, à ce problème :

Trouver sur un segment de droite (*dont une des extrémités peut être rejetée à l'infini*), *situé tout entier du même côté que le point* A_2 *par rapport à la droite* ${}_{A_1}D_{A_2}$, *le point pour lequel la différence des distances aux points* A_1 *et* A_2 *est minima.*

Pour résoudre ce problème, nous allons étudier comment varie la différence des distances d'un point, mobile sur une droite, à deux points fixes donnés hors de cette droite.

9. Soient Δ la droite, A et B les points donnés. La droite Δ coupe la droite AB en un point H que nous supposerons du même côté que le point A par rapport au milieu du segment AB. Nous désignerons par H' le conjugué harmonique du point H par rapport aux points A et B.

Considérons toutes les hyperboles qui ont pour foyers les points A et B. Parmi ces hyperboles, l'une est tangente à la droite Δ et la touche au point I. Il est facile de déterminer le point I en remarquant que, la tangente à l'hyperbole étant bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact, le point I doit se trouver sur le cercle décrit sur HH' comme diamètre.

Si l'on diminue l'axe transverse de cette hyperbole tangente, la droite Δ la coupe en deux points; si l'on augmente cet axe transverse, l'hyperbole n'est plus coupée par Δ. De là cette conséquence, à savoir que le point I est le point de la droite Δ, dont la différence des distances aux points A et B est maxima. Remarquons que le point I est situé du même côté que le point A par rapport à la droite ${}_AD_B$, c'est-à-dire dans la région (A).

Au fur et à mesure que l'on fait diminuer l'axe transverse, on a des hyperboles qui coupent la droite Δ en deux points toujours situés dans la région (A) jusqu'à ce qu'on arrive à l'hyperbole pour laquelle la droite Δ est parallèle à l'une des asymptotes. Cette dernière coupe la droite Δ en un point J situé entre le point I et la droite ${}_AD_B$, et en un second point rejeté à l'infini. Il est facile de déterminer géométriquement le point J.

En effet, Δ étant parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole en question, la perpendiculaire BT, abaissée du foyer B sur la droite Δ, est tangente au cercle directeur qui a pour centre le foyer A; cela nous permet de tracer ce cercle directeur Γ, qui touche la perpendiculaire BT en un point où nous placerons la lettre T.

Soit B' le symétrique, situé sur BT, du point B par rapport à la droite Δ. Le point J est le centre du cercle qui passe par les points B et B' et est tangent au cercle Γ. Dès lors, nous aurons ce point en menant par les points B et B' un cercle quelconque (ce qui est facile, puisque le centre de ce cercle se trouve sur la droite Δ), prenant le point d'intersection S de la corde commune à ce cercle et au cercle Γ avec la droite BB', et menant par le point S, au cercle Γ, la tangente SU, dont U est le point de contact; la droite UA coupe la droite Δ au point J.

A partir de là, et au fur et à mesure qu'on fait décroître l'axe transverse de l'hyperbole, celle-ci coupe la droite Δ en deux points situés, de part et d'autre, de la droite ${}_AD_B$, dont ils se rapprochent tous deux indéfiniment pour venir à la limite se confondre avec le point d'intersection de Δ et de ${}_AD_B$ lorsque l'hyperbole se réduit à cette dernière droite, c'est-à-dire lorsque la différence des distances aux points A et B devient nulle.

D'après ce qui précède, la différence des distances aux points A et B a une certaine valeur pour le point situé à l'infini sur la droite Δ du même côté que A par rapport à ${}_AD_B$. Au fur et à mesure que l'on se rapproche du point I, cette différence augmente; elle est maxima au point I, puis elle diminue; au point I, elle redevient la même que pour le point situé à l'infini; puis elle continue à diminuer jusqu'au point de rencontre avec ${}_AD_B$, où elle est nulle; elle croît ensuite d'une manière continue pour reprendre à l'infini la valeur d'où nous sommes partis.

En résumé, cette différence a un minimum en I et un maximum sur ${}_AD_B$.

10. Revenons maintenant à notre problème. Nous avons un segment PQ de droite situé tout entier du même côté que A_2 par rapport à ${}_{A_1}D_{A_2}$. On voit, d'après ce qui précède, que celle des extrémités P ou Q de ce segment, pour laquelle la différence

$PA_1 - PA_2$ ou $QA_1 - QA_2$ est la plus petite, est le point du segment dont la différence des distances à A_1 et A_2 est minima.

Si le segment PQ, au besoin prolongé, coupe A_1A_2 du côté de A_2 par rapport à ${}_{A_1}D_{A_2}$, ce point de différence minima est celle des extrémités du segment qui est la plus rapprochée de ${}_{A_1}D_{A_2}$.

Si, au contraire, le segment PQ, au besoin prolongé, coupe A_1A_2 du côté de A_1 par rapport à ${}_{A_1}D_{A_2}$, et que I et J soient, pour cette droite PQ, les points qui ont été définis plus haut, trois cas peuvent se présenter :

1° L'extrémité du segment PQ la plus rapprochée de ${}_{A_1}D_{A_2}$ est située entre J et ${}_{A_1}D_{A_2}$; dans ce cas, c'est cette extrémité qui répond à la question.

2° Cette extrémité est entre I et J ; on ne peut rien dire *a priori*.

3° Cette extrémité est en deçà du point I; dans ce cas, c'est la seconde extrémité qui répond à la question.

Mais si les points I et J sont commodes pour la discussion géométrique, leur détermination est trop longue dans la pratique; il vaut mieux, à ce point de vue, lorsque PQ coupe A_1A_2 du côté de A_1 par rapport à ${}_{A_1}D_{A_2}$, comparer tout simplement les différences $PA_1 - PA_2$ et $QA_1 - QA_2$, comme cela est d'ailleurs nécessaire dans le second des trois cas qui viennent d'être énoncés.

11. On peut imposer au centre de la couronne la *condition d'avoir son centre sur une droite donnée* Δ.

Il suffira alors, dans chaque détermination partielle, par exemple dans celle qui fait correspondre la région $r(A_2)$ à la région $R(A_1)$, de prendre sur le segment de la droite Δ, compris dans la région ρ commune à $r(A_2)$ et $R(A_1)$, le point M pour lequel la différence $MA_1 - MA_2$ est minima, problème qui ne diffère pas du précédent.

D'ailleurs, la droite Δ ne coupant généralement pas toutes les régions telles que ρ, le nombre des déterminations partielles se trouvera réduit.

12. Si la droite Δ coïncide avec la droite à l'infini du plan, on a la solution de ce problème :

Trouver les deux droites parallèles les plus rapprochées qui comprennent entre elles un système de points donnés.

Il est bien évident que, pour ce problème, les *points intérieurs* du système n'ont pas à intervenir dans la solution; il est donc inutile d'en tenir compte.

Mais ce dernier problème comporte une solution plus simple, que nous allons exposer brièvement :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$ les sommets du système.

Prenons un de ces sommets, A_i par exemple; par ce sommet, menons des parallèles aux $p - 2$ côtés du polygone qui n'y aboutissent pas. Parmi les droites ainsi menées, un certain nombre sont complètement extérieures au polygone; considérons les côtés qui leur correspondent, et soit δ_i la distance du point A_i à celui de ces côtés qui en est le plus rapproché.

Pour A_1 nous obtenons ainsi δ_1 ; pour A_2, $\delta_2, \ldots$; pour A_p, δ_p. Nous voyons quelle est la plus petite des longueurs $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$; elle nous donne la solution cherchée.