BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur l'évaluation graphique des moments et des moments d'inertie des aires planes

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 21-26
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__21_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur l'évaluation graphique des moments et des moments d'inertie des aires planes; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 21 décembre 1883.)

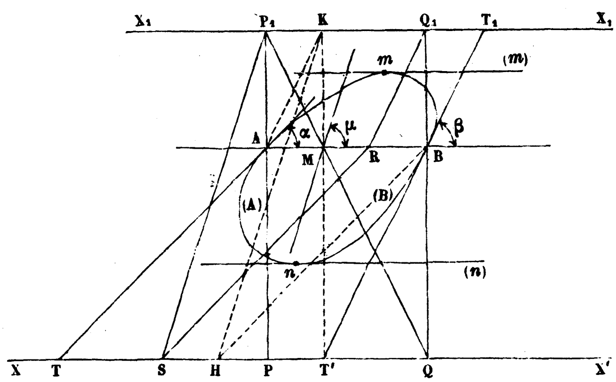
1. M. Collignon a fait connaître au Congrès tenu à Lille en 1874, par l'Association française pour l'avancement des Sciences, une ingénieuse méthode graphique, qui permet d'obtenir, par une simple évaluation de surface, le moment, ou le moment d'inertie d'une aire plane quelconque par rapport à un axe donné dans son plan. Cela revient, au point de vue analytique, à trouver, au moyen d'une simple quadrature, la valeur de l'intégrale $\int xy\,dy$, ou de l'intégrale $\int xy^2 dy$ prise le long d'un contour donné; la méthode se généralise pour l'intégrale $\int xy^m dy$, où m est un nombre entier et positif.

2. Voici quelle est cette méthode : Comprenons le contour qui limite l'aire donnée entre deux parallèles à l'axe donné XX'; nous déterminons ainsi sur ce contour deux points m et n, qui divisent le contour en deux branches (A) et (B). Menons à XX' une parallèle X_1X_1' quelconque, mais extérieure au contour donné, et désignons par a la distance de ces deux droites.

Soit maintenant AB une corde parallèle à XX′, et dont les distances à XX′ et à $X_1 X'_1$ sont y et y_1 ; prenons sur AB le point M, tel que $\frac{\text{AM}}{\text{BM}} = \frac{y_1}{y}$; le point M, quand AB varie en restant parallèle à XX′, engendre une courbe (M), qui va du point n au point m ; la surface comprise entre (M) et (B), multipliée par a, donne le moment de l'aire considérée par rapport à XX′.

Si la courbe (M_1) est déduite de (M) et de (B), comme (M) l'a été de (A) et de (B), la surface comprise entre (M_1) et (B), multipliée par a^2, donne le moment d'inertie de l'air considéré par rapport à XX′. Déduisant, toujours par le même procédé, la courbe (M_2) des courbes (M_1) et (B), on obtient une surface qui,

Fig. 1.



multipliée par a^3, donne la valeur de l'intégrale $\int xy^3\,dy$, prise le long du contour donné, et ainsi de suite. Chacune des courbes (M_1), (M_2), (M_3), ... dérive donc de la précédente et de la courbe (B), comme (M) dérive de (A) et de (B) ; il nous suffit dès lors de considérer cette courbe (M).

3. La valeur d'un procédé graphique dépendant du plus ou moins de précision que l'on peut apporter à son exécution, on doit s'attacher à déterminer la courbe (M) avec toute l'exactitude désirable. Aussi est-il intéressant de pouvoir obtenir, en même temps que chaque point de cette courbe, la tangente en ce point. Tel est le but de la présente Note ; nous donnerons aussi, mais

alors à simple titre de propriété géométrique, la détermination du rayon de courbure.

4. Prenons une position de la corde AB; par les points A et B, menons à XX′ les perpendiculaires PP_1 et QQ_1; tirons P_1Q; cette droite coupe AB au point correspondant M de la courbe (M).

Appelons

a la distance PP_1 ou QQ_1 de XX′ et $X_1X'_1$;
y la distance AP ou BQ de XX′ et AB;
y_1 la distance AP_1 ou BQ_1 de $X_1X'_1$ et AB;
X la longueur AB;
x_1 la longueur AM;
α l'angle que la tangente en A à la courbe (A) fait avec XX′;
β l'angle que la tangente en B à la courbe (B) fait avec XX′;
μ l'angle que la tangente en M à la courbe (M) fait avec XX′.

Nous avons, par définition,

$$\frac{x_1}{X} = \frac{y_1}{a} = \frac{a-y}{a};$$

donc

$$a x_1 = X(a-y).$$

Différentions cette expression; il vient

$$a\,dx_1 = dX(a-y) - X\,dy.$$

Soient $d(A)$, $d(B)$ et $d(M)$ les arcs infiniment petits décrits par les points A, B et M, lorsque y s'accroît de dy; nous avons

$$dx_1 = d(M)\cos\mu - d(A)\cos\alpha = dy(\cot\mu - \cot\alpha),$$
$$dX = d(B)\cos\beta - d(A)\cos\alpha = dy(\cot\beta - \cot\alpha).$$

L'égalité précédente devient alors, en divisant par dy,

$$a(\cot\mu - \cot\alpha) = (a-y)(\cot\beta - \cot\alpha) - X$$

ou

$$a\cot\mu = y_1\cot\beta + y\cot\alpha - X. \qquad (1)$$

Cette formule est générale, pourvu que les angles α, β et μ soient tous trois comptés dans le sens direct. Cherchons son interprétation géométrique, dans le cas de la figure actuelle; elle donne.

en supposant P_1S parallèle à la tangente en M à la courbe (M),

$$PS = Q_1T_1 + TP - AB.$$

Menons Q_1R parallèle à BT_1 ; nous avons

$$PS = TP - (AB - Q_1T_1) = TP - (AB - BR) = TP - AR;$$

par suite,

$$AR = TS,$$

et SR est parallèle à AT. Donc :

En menant Q_1R *parallèle à la tangente en* B, *puis* RS *parallèle à la tangente en* A, *et en tirant* PS, *on a la direction de la tangente en* M.

5. Cette construction est générale et indépendante de la disposition de la figure. Le problème se trouve donc ainsi résolu très simplement. Mais nous devons à l'obligeance de M. Collignon une remarque qui permet de simplifier encore la solution, en rendant inutiles les perpendiculaires PP_1 et QQ_1 à XX', et en faisant reposer la construction sur l'emploi exclusif des tangentes AT et BT; cette remarque peut se formuler ainsi : si l'on déplace la figure Q_1RSP_1 de la quantité Q_1T_1 parallèlement à XX', le point Q_1 vient en T_1, le point R en B, le point S en H, BH étant parallèle à AT, et le point P_1 en K, AK étant parallèle à BT_1.

Dès lors la construction de la courbe (M), point par point, avec ses tangentes, pourra s'effectuer par le procédé bien simple qui suit :

Pour une position de la corde AB, *prendre les tangentes* AT *et* BT'; *mener* AK, *parallèle à* BT', *jusqu'à* $X_1X'_1$, *et* BH, *parallèle à* AT, *jusqu'à* XX'; *tirer* KT' *qui donne le point* M *et* KH *qui donne la direction de la tangente à la courbe* (M) *en ce point.*

6. Voyons maintenant ce qui a lieu aux points limites *m* et *n*; nous appellerons les parallèles (*m*) et (*n*), menées par ces points à XX', les *droites limites*. Rien ne distinguant géométriquement l'une de ces droites de l'autre, il nous suffit d'en prendre une, (*m*) par exemple.

Il y a trois cas à considérer :

1° La droite (m) se confond sur une certaine longueur avec le contour, c'est-à-dire que l'aire est en partie limitée par une droite parallèle à XX'; dans ce cas, rien ne distingue la corde (m) d'une corde AB quelconque, et l'on peut appliquer l'une ou l'autre des constructions précédentes.

2° La droite (m) rencontre le contour en un seul point, mais sans être tangente à ce contour, c'est-à-dire le coupe en un point anguleux. Il y a alors au point m deux tangentes au contour, l'une pour la branche (A), l'autre pour la branche (B); en appliquant alors la seconde construction, on est conduit à la règle suivante :

Prendre le point de rencontre de la tangente à la branche (A) *avec* XX' *et le point de rencontre de la tangente à la branche* (B) *avec* $X_1 X'_1$; *joindre ces deux points.*

On a ainsi la direction de la tangente à la courbe (M) au point m.

3° La droite (m) touche le contour au point m; appliquons dans ce cas la première construction; les droites PP_1 et QQ_1 se confondent; le point R devient le point à l'infini sur AB; le point S, le point à l'infini sur OX'; la droite $P_1 S$ se confond alors avec $X_1 X'_1$; donc *la tangente en m à la courbe* (M) *est parallèle à* XX'.

7. Nous pouvons, non pas en vue de la détermination graphique de la courbe (M), mais à titre de recherche géométrique, nous proposer de trouver la relation qui existe entre le rayon de courbure R_M de la courbe (M) au point M et les rayons de courbure R_A et R_B du contour aux points A et B. A cet effet, différentions l'équation (1); cela nous donne

$$-\frac{a\,d\mu}{\sin^2\mu} = dy_1 \cot\beta - \frac{y_1\,d\beta}{\sin^2\beta} + dy\cot\alpha - \frac{y\,d\alpha}{\sin^2\alpha} - dX.$$

Appelant toujours $d(M)$, $d(A)$, $d(B)$ les arcs infiniment petits décrits par les points M, A, B, nous avons

$$d\mu = \frac{d(M)}{R_M} = \frac{dy}{R_M \sin\mu},$$

et de même

$$d\alpha = \frac{dy}{R_A \sin\alpha}, \quad d\beta = \frac{dy}{R_B \sin\beta};$$

maintenant

$$dy_1 = -dy$$

et, comme nous l'avons déjà vu,

$$dX = dy(\cot\beta - \cot\alpha).$$

Faisant toutes ces substitutions dans la formule différentielle écrite plus haut, et divisant par dy, nous avons

$$-\frac{a}{R_M \sin^3\mu} = -\cot\beta - \frac{y_1}{R_B \sin^3\beta} + \cot\alpha - \frac{y}{R_A \sin^3\alpha} - (\cot\beta - \cot\alpha)$$

ou

$$\frac{a}{R_M \sin^3\mu} = \frac{y}{R_A \sin^3\alpha} + \frac{y_1}{R_B \sin^3\beta} + 2(\cot\alpha - \cot\beta);$$

le rayon de courbure R_M est ainsi déterminé en fonction de quantités toutes connues.

Si (A) et (B) sont des droites, R_A et R_B sont infinis, et la formule se réduit à

$$\frac{a}{R_M \sin^3\mu} = 2(\cot\beta - \cot\alpha),$$

c'est-à-dire

$$R_M \sin^3\mu = \text{const}.$$

Et, en effet, la courbe (M) est dans ce cas une parabole dont l'axe est parallèle à XX'; or on sait que, pour une telle courbe, $R_M \sin^3\mu$ est constant.

Si les droites sont parallèles, $\alpha = \beta$; alors R_M est infini et la courbe (M) est une droite, ce qui était évident, *a priori*.