DAVID

Sur une transformation de équation différentielle linéaire d'un ordre quelconque

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 36-42
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__36_1>

Sur une transformation de l'équation différentielle linéaire d'un ordre quelconque; par M. David [1].

(Séance du 4 janvier 1884.)

M. Laguerre a démontré (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 117 et 225) les deux théorèmes bien remarquables qui suivent et que l'on peut énoncer ainsi :

1° L'équation différentielle linéaire du troisième ordre se ramène par des quadratures à une équation de la forme

$$\frac{d^3u}{dz^3} + 2\,F(z)\frac{du}{dz} + \left[F'(z) + \frac{1}{2}\right]u = 0;$$

2° Dans l'équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre, on peut faire disparaître le second et le troisième terme par des quadratures et par la résolution d'une équation linéaire du second ordre.

Il introduit dans son analyse une fonction des coefficients qu'il appelle avec raison *invariant*.

J'introduis un nouvel invariant qui permet de compléter, à certains égards, les théorèmes qui viennent d'être énoncés, particulièrement en ce qui concerne les équations du quatrième ordre.

I.

Je suppose que dans l'équation proposée on ait fait disparaître le second terme, ce qui se fait par de simples quadratures, comme

[1] Cette Note contient des résultats démontrés par M. Halphen dans un travail inédit couronné par l'Académie des Sciences, et qui m'est inconnu. Le Mémoire de M. Halphen ne pouvant paraître qu'à une époque relativement éloignée, elle présente peut-être encore quelque intérêt; d'ailleurs la marche que j'ai suivie est, paraît-il, différente.

on sait; et je représente en conséquence cette équation par

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{n(n-1)}{1.2} B \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} C \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} \\ &\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} E \frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Je fais d'abord $y = uv$; d'où il résulte

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n u}{dx^n} v + \frac{n}{1} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \frac{dv}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} \frac{d^2 v}{dx^2} + \ldots;$$

et c'est dans $\frac{d^n u}{dx^n}$ que je remplace x par une fonction quelconque de z. Pour cela, j'emploie le théorème des fonctions de fonctions sous la forme

$$(2)\quad \frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^n u}{dz^n} \frac{a_1^n}{[n]} + \frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} D \frac{a_1^{n-1}}{[n-1]} + \frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} D^2 \frac{a_1^{n-2}}{[n-2]} + \ldots,$$

où l'on a mis pour abréviation $[n]$ au lieu de $1, 2, 3, \ldots, n$. Mais cette formule demande quelques explications.

Soit, dans une expression donnée, un terme tel que

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} a_4^{p_4}$$

par exemple, dans lequel les quantités a_1, a_2, a_3, a_4 peuvent être appelées des quantités successives. La caractéristique D représente l'opération suivante :

$$D a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} a_4^{p_4} = p_3 a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3-1} \frac{a_4^{p_4+1}}{p_4+1} + p_4 a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} a_4^{p_4-1} a_5,$$

qui, ainsi qu'on le voit, ne porte que sur les deux dernières lettres. Dans le cas où l'avant-dernière lettre aurait un exposant égal à zéro, c'est-à-dire dans le cas où cette lettre manquerait, on serait conduit, pour le second terme du second membre, à un exposant négatif, et alors il faudrait supprimer ce terme. C'est la règle d'Arbogast. Une seconde opération est représentée par D^2, une troisième par D^3, et ainsi de suite. Les quantités désignées par $D \frac{a_1^{n-1}}{[n-1]}$, $D^2 \frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}$, $D^3 \frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}$, ... dans l'équation précédente sont ainsi bien définies et se déduisent successivement avec la plus grande facilité les unes des autres. Si l'on suppose maintenant

$$(3) \qquad a_1 = \frac{dz}{dx}, \quad a_2 = \frac{d^2 z}{1.2\, dx^2}, \quad a_3 = \frac{d^3 z}{1.2.3\, dx^3}, \quad \ldots,$$

la formule (2) est celle du théorème des fonctions de fonctions (voir *Journal de Mathématiques*, p. 67; 1882). Pour la facilité des opérations qui vont suivre, j'ajoute les relations suivantes :

$$(4) \qquad 2a_2 = \frac{da_1}{dx}, \quad 3a_3 = \frac{da_2}{dx}, \quad 4a_4 = \frac{da_3}{dx}, \quad \ldots.$$

Cela posé, en employant la formule (2), je remplace l'équation proposée (1) par l'équation

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n u}{dz^n} v a_1^n + \frac{n}{1} \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} \left(\frac{dv}{dx} a_1^{n-1} + v \mathrm{D} a_1^{n-1} \right) \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^{n-2} u}{dz^{n-2}} \left[\frac{d^2 v}{dx^2} a_1^{n-2} + 2 \frac{dv}{dx} \mathrm{D} a_1^{n-2} + 1.2 v \left(\mathrm{D}^2 a_1^{n-2} + \frac{\mathrm{B}}{1.2} a_1^{n-2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{d^{n-3} u}{dz^{n-3}} \left[\frac{d^3 v}{dx^3} a_1^{n-3} + 3 \frac{d^2 v}{dx^2} \mathrm{D} a_1^{n-3} + 2.3 \frac{dv}{dx} \left(\mathrm{D}^2 a_1^{n-3} + \frac{\mathrm{B}}{1.2} a_1^{n-3} \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 1.2.3 v \left(\mathrm{D}^3 a_1^{n-3} + \frac{\mathrm{B}}{1.2} \mathrm{D} a_1^{n-3} + \frac{\mathrm{C}}{1.2.3} a_1^{n-3} \right) \right] + \ldots = 0,
\end{aligned}$$

laquelle devient, en développant les opérations représentées par la caractéristique D,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n u}{dz^n} v a_1^n + \frac{n}{1} \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} \left[\frac{dv}{dx} a_1^{n-1} + v(n-1) a_1^{n-1} a_2 \right] \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^{n-2} u}{dz^{n-3}} \left\{ \frac{d^2 v}{dx^2} a_1^{n-2} + 2 \frac{dv}{dx} (n-2) a_1^{n-3} a_2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 1.2 v \left[(n-2)(n-3) a_1^{n-4} \frac{a_2^2}{1.2} + (n-2) a_1^{n-3} a_3 + \frac{\mathrm{B}}{1.2} a_1^{n-2} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{d^{n-3} u}{dz^{n-3}} \left\{ \frac{d^3 v}{dx^3} a_1^{n-3} + 3 \frac{d^2 v}{dx^2} (n-3) a_1^{n-4} a_2 \right. \\
&\qquad\qquad + 2.3 \frac{dv}{dx} \left[(n-3) a_1^{n-5} \frac{a_2^2}{1.2} + (n-3) a_1^{n-4} a_3 + \frac{\mathrm{B}}{1.2} a_1^{n-3} \right] \\
&\qquad\qquad + 1.2.3 v \left[(n-3)(n-4)(n-5) a_1^{n-6} \frac{a_2^3}{1.2.3} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad + (n-3)(n-4) a_1^{n-5} a_2 a_3 + (n-3) a_1^{n-4} a_4 \\
&\qquad\qquad\qquad \left. \left. + \mathrm{B} \frac{1}{1.2} (n-3) a_1^{n-4} a_2 + \frac{\mathrm{C}}{1.2.3} a_1^{n-3} \right] \right\} + \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Grâce à la règle d'Arbogast, je n'ai pas écrit le terme suivant, pour abréger, attendu qu'il s'écrit immédiatement à la suite du précédent sans calcul et sans autre peine que celui de l'écrire; mais je dois en faire usage dans ce qui suit, et il est nécessaire de le rétablir.

On fait disparaître le second terme de cette équation en posant

$$\frac{dv}{dx} = -v(n-1)\frac{a_2}{a_1};$$

il en résulte par la différentiation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\left[(n-1)(n+1)\frac{a_2^2}{a_1^2} - 3(n-1)\frac{1}{a_1}a_3\right],$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = v\left[-(n-1)(n+1)(n+3)\frac{1}{a_1^3}a_2^3 + 9(n-1)(n+1)\frac{1}{a_1^2}a_2a_3 - 12(n-1)\frac{1}{a_1}a_4\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{d^4v}{dx^4} = v\Big[&(n-1)(n+1)(n+3)(n-5)\frac{1}{a_1^4}a_2^4 - 18(n-1)(n+1)(n+3)\frac{1}{a_1^3}a_2^2a_3\\ &+48(n-1)(n+1)\frac{1}{a_1^2}a_2a_4 + 27(n-1)(n+1)\frac{1}{a_1^2}a_3^2 - 60(n-1)\frac{1}{a_1}a_5\Big].\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans l'équation transformée, elle devient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^nu}{dz^n} + \frac{n(n-1)}{1.2}B_0\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}C_0\frac{d^{n-3}u}{dz^{n-3}}\\ &\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}E_0\frac{d^{n-4}u}{dz^{n-4}} + \ldots = 0,\end{aligned}\right.$$

les coefficients B_0, C_0, E_0, ... étant déterminés par les relations suivantes, relativement très simples :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}B_0 &= \frac{n+1}{a_1^2}\left(\frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1} + \frac{B}{n+1}\right) = \frac{n+1}{3}a_1^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{d^2a_1^{-\frac{1}{2}}}{dx^2} + \frac{B}{n+1}a_1^{-\frac{1}{2}}\right),\\ C_0 &= \frac{n+1}{a_1^3}\left(-12\frac{a_2^3}{a_1^3} + 18\frac{a_2a_3}{a_1^2} - 6\frac{a_4}{a_1} - 6\frac{B}{n+1}\frac{a_2}{a_1} + \frac{C}{n+1}\right),\\ E_0 &= \frac{n+1}{a_1^4}\left\{3(n+59)\frac{a_2^4}{a_1^4} - 6(n+59)\frac{a_2^2a_3}{a_1^4} + 3(n+23)\frac{a_3^2}{a_1^2} + 144\frac{a_2a_4}{a_1^2}\right.\\ &\qquad\left. - 36\frac{a_5}{a_1} + \frac{6B}{n+1}\left[(n+11)\frac{a_2^2}{a_1^2} - (n+5)\frac{a_3}{a_1}\right] - 12\frac{C}{n+1}\frac{a_2}{a_1} + \frac{E}{n+1}\right\}.\end{aligned}\right.$$

II.

Une grande simplification est obtenue par l'introduction de certaines fonctions auxquelles M. Laguerre a donné le nom d'*invariants* des équations différentielles linéaires.

En premier lieu, on trouve presque immédiatement la relation

$$(7) \qquad 3\frac{dB_0}{dz} - 2C_0 = a_1^{-3}\left(3\frac{dB}{dx} - 2C\right).$$

On voit qu'après la transformation la fonction $3\frac{dB}{dx} - 2C$ se reproduit à un facteur près dépendant uniquement de la transformation; M. Laguerre l'a nommé *invariant*, et en effet la définition qui précède est tout à fait semblable à celle des invariants dans la théorie des formes algébriques. Je ferai seulement remarquer que M. Laguerre ne l'a obtenue qu'en considérant des équations du troisième ordre; et c'est un fait remarquable que, dans le cas d'un ordre quelconque, cet invariant est indépendant de cet ordre. Toutefois j'en ai simplifié un peu l'expression en supposant que l'on ait fait disparaître le second terme de l'équation différentielle; en prenant l'équation complète, on retrouve facilement cet invariant sous la forme que lui a donnée M. Laguerre.

Je détermine un nouvel invariant de l'équation différentielle en remarquant que les expressions de B_0^2, $\frac{d^2B_0}{dz^2}$, $\frac{dC_0}{dz}$ renferment les mêmes arguments que l'expression de E_0; je forme en conséquence l'expression

$$MB_0^2 + N\frac{d^2B_0}{dz^2} + P\frac{dC_0}{dz} + E_0,$$

dans laquelle M, N, P sont des constantes, et je cherche à déterminer celles-ci de manière à la rendre aussi simple que possible. C'est ainsi qu'on peut égaler à zéro certains coefficients des arguments, et, en faisant un choix convenable de ces coefficients, on est conduit à poser

$$M = -3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}, \quad N = \frac{6}{5}, \quad P = -2;$$

il en résulte la relation

$$(8) \quad -3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}B_0^2 + \frac{6}{5}\frac{d^2B_0}{dz^2} - 2\frac{dC_0}{dz} + E_0 = a_1^4\left(-3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}B^2 + \frac{6}{5}\frac{d^2B}{dx^2} - 2\frac{dC}{dx} + E\right).$$

Le multiplicateur de a_1^{-4} est l'invariant de l'équation différentielle dont il s'agit en ce moment.

En combinant les deux équations (7) et (8) de manière à faire disparaître la fonction a_1, il vient

$$\frac{-3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}B^2+\frac{6}{5}\frac{d^2B}{dx^2}-2\frac{dC}{dx}+E}{\left(3\frac{dB}{dx}-2C\right)^{\frac{3}{4}}}=\frac{-3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}B_0^2+\frac{6}{5}\frac{d^2B_0}{dz^2}-2\frac{dC_0}{dz}+E_0}{\left(3\frac{dB_0}{dz}-2C_0\right)^{\frac{3}{4}}};$$

et cette équation présente cette propriété curieuse, que le second membre reste toujours égal au premier, quelle que soit la fonction x de z que l'on emploie pour faire la transformation. Ce premier membre est un invariant absolu de l'équation différentielle.

III.

Maintenant, à la place des équations (7) et (8), nous écrivons

$$(9) \qquad \sqrt[3]{H_0}\,dz=\sqrt[3]{H}\,dx, \quad \sqrt[4]{\Theta_0}\,dz=\sqrt[4]{\Theta}\,dx,$$

et, à la place des formules (6),

$$(6\,bis)\left\{\begin{aligned} B_0&=\frac{n+1}{a_1^2}\left(\frac{a_2^2}{a_1^2}-\frac{a_3}{a_1}+\frac{B}{n+1}\right)=(n+1)\left(-\frac{b_2^2}{b_1^2}+\frac{b_3}{b_1}+\frac{B}{n+1}b_1^2\right),\\ C_0&=\frac{3}{2}\frac{dB_0}{dz}-\frac{1}{2}H_0,\\ E_0&=3\frac{n+\frac{7}{5}}{n+1}B_0^2+\frac{9}{5}\frac{d^2B_0}{dz^2}+\Theta_0-\frac{dH_0}{dz},\end{aligned}\right.$$

qui donnent les valeurs des premiers termes de la transformée (5) et qui renferment une fonction arbitraire $a_1=\frac{dz}{dx}$ ou $b_1=\frac{dx}{dz}$.

On peut profiter de diverses manières de l'indétermination de la fonction $\frac{dz}{dx}$. Voici divers cas :

1° En vertu de la première des formules (6 *bis*), on peut considérer B_0 comme une fonction donnée de z; car il en résulte une équation différentielle qui établit une relation entre x et z; les équations (9) déterminent ensuite H_0 et Θ_0.

Si l'on fait, par exemple, $B_0=0$, on a l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2a_1^{-\frac{1}{2}}}{dx^2}+\frac{B}{n+1}a_1^{-\frac{1}{2}}=0,$$

et l'équation transformée (5) devient

$$\frac{d^n u}{dz^n} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} H_0 \frac{d^{n-3} u}{dz^{n-3}} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \left(\Theta_0 - \frac{dH_0}{dz}\right) \frac{d^{n-4} u}{dz^{n-4}} + \ldots = 0;$$

c'est le second théorème de M. Laguerre, complété par la détermination de deux des termes de l'équation différentielle.

2° En prenant pour H_0 une fonction arbitraire de z, la première des équations (9) établit une relation entre x et z; la seconde des équations (9) détermine ensuite Θ_0; enfin les coefficients B_0, C_0, E_0 sont donnés par les équations (6 *bis*).

Dans le cas particulier de $n = 3$, $H_0 = 1$, on a le premier théorème de M. Laguerre.

3° On a une nouvelle transformation en donnant à Θ_0 une valeur arbitraire; la première des équations (9) détermine H_0 et les coefficients B_0, C_0, E_0 s'ensuivent.

4° Les équations (9) donnent encore

$$\frac{\Theta_0}{H_0} - \frac{1}{H_0}\frac{dH_0}{dz} = \frac{a_1^{-4} H}{H_0}\left(\frac{\Theta}{H} + \frac{3}{a_1}\frac{da_1}{dx} - \frac{1}{H}\frac{dH}{dx}\right).$$

En posant

$$\frac{\Theta}{H} + \frac{3}{a_1}\frac{da_1}{dx} - \frac{1}{H}\frac{dH}{dx} = 0,$$

on détermine une nouvelle relation entre z et x. La première des équations (9) détermine ensuite H_0, puis on en déduit les coefficients B_0, C_0, E_0.

En particulier, la transformée du quatrième ordre devient

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + 6 B_0 \frac{d^2 u}{dz^2} + 2\left(3\frac{dB_0}{dz} - H_0\right)\frac{du}{dz} + \left(\frac{9^2}{5^2} B_0^2 + \frac{9}{5}\frac{d^2 B_0}{dz^2}\right) u = 0.$$

Ces transformations dépendent, la première d'une équation différentielle linéaire du second ordre, les trois autres des quadratures.

Les calculs pour passer de l'équation proposée (1) à l'équation transformée (5) sont déjà très pénibles. Comme les résultats auxquels on arrive sont relativement très simples, on doit croire qu'un calcul meilleur conduirait plus rapidement à ces résultats et sans doute à la détermination d'autres termes de la transformée.