BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Sur un groupe de transformations des Points de l'espace situés du même côté d'un plan

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 43-47
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__43_0>

Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan; par M. E. Picard.

(Séance du 7 mars 1884.)

1. On connaît l'importance du groupe de substitutions

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

où a, b, c, d sont quatre entiers réels satisfaisant à la condition $ad - bc = 1$. A chaque point z situé au-dessus de l'axe des quantités réelles correspond par une telle substitution un point qui est également au-dessus du même axe. On sait aussi qu'à un point quelconque du demi-plan correspond, en général, par une substitution du groupe, un point et un seul situé dans le triangle formé par les trois courbes

$$x = -\tfrac{1}{2}, \quad x = +\tfrac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

triangle dont un des sommets est à l'infini sur l'axe des y.

Ce théorème important est, comme il est bien connu, étroitement lié à la question de la réduction des formes quadratiques binaires définies; on peut, par exemple, le rattacher à cette question de la manière suivante.

Posons

$$z = x + iy,$$

la partie réelle de $\dfrac{az+b}{cz+d}$ sera alors

$$\frac{ac(x^2+y^2) + (ad+bc)x + bd}{c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2},$$

et le carré du module de la même expression est égal à

$$\frac{a^2(x^2+y^2) + 2abx + b^2}{c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2},$$

x, y désignant ainsi deux constantes arbitraires (je suppose seulement $y > 0$); considérons la forme quadratique aux indéterminées X et Y,

(I) $$X^2 + 2xXY + (x^2+y^2)Y^2;$$

cette forme, comme on le voit, de suite, est définie. Si l'on effectue sur elle la substitution

$$\text{(II)} \qquad (X,\ Y,\ dX + bY,\ cX + aY).$$

elle devient

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} [c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2]X^2 \\ \quad + 2[(x^2+y^2)ac + (ad+bc)x + bd]XY \\ \quad + [a^2(x^2+y^2) + 2abx + b^2]Y^2. \end{array} \right.$$

Or on peut choisir les entiers a, b, c, d avec la condition

$$ad - bc = 1,$$

de telle manière que cette forme soit réduite; je rappelle l'énoncé du théorème fondamental relatif à la réduction des formes définies. Soit

$$AX^2 + 2BXY + CY^2$$

une forme définie positive à coefficients quelconques

$$(A > 0,\ C > 0,\ B^2 - AC < 0).$$

Par une substitution (II) à coefficients entiers, on peut la transformer en une autre

$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2,$$

dans laquelle on aura $A' \leq C'$ et $-A' \leq 2B' \leq A'$.

En appliquant ce théorème à la forme (I), on voit que l'on peut choisir les entiers a, b, c, d de telle manière que la forme (III) soit réduite, par suite

$$\frac{c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2}{a^2(x^2+y^2) + 2abx + b^2} < 1;$$

donc le module de $\frac{az+b}{cz+d}$ sera plus grand que l'unité et les secondes conditions de la réduction nous apprennent que la partie réelle de $\frac{az+b}{cz+d}$ est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.

2. En cherchant à généraliser ces considérations si simples, j'ai été conduit à un groupe de transformations des points d'un demi-espace (portion de l'espace située d'un côté d'un plan) tout à fait analogue au groupe de transformations des points d'un demi-plan, dont je viens de parler.

Au lieu de la forme quadratique (I), je vais envisager une forme quadratique à indéterminées conjuguées. On se rappelle que M. Hermite a donné ce nom aux formes telles que

$$AXX_0 + BXY_0 + B_0X_0Y + CYY_0,$$

dans laquelle X et X_0 ainsi que Y et Y_0 sont deux variables complexes conjuguées. A et C sont réels, et B_0 est la conjuguée de B; quand $BB_0 - AC < 0$, $A > 0$, $C > 0$, la forme est dite définie et positive. La forme qui va remplacer la forme (I) sera

$$(\mathrm{I}') \qquad XX_0 + xXY_0 + x_0X_0Y + (xx_0 + y^2)YY_0.$$

x est une quantité complexe arbitraire, et y une quantité réelle positive.

La substitution

$$(X,\ Y,\ dX + bY,\ cX + aY) \quad [ad - bc = 1],$$

où maintenant a, b, c, d peuvent être complexes, la transforme en

$$A'XX_0 + B'XY_0 + B'_0X_0Y + C'YY_0,$$

en posant

$$\begin{aligned} A' &= cc_0(xx_0 + y^2) + dc_0x + d_0cx_0 + dd_0,\\ B' &= ca_0(xx_0 + y^2) + a_0dx + cb_0x_0 + db_0,\\ C' &= aa_0(xx_0 + y^2) + ba_0x + b_0ax_0 + bb_0.\end{aligned}$$

On est ainsi conduit à une transformation relative à la variable complexe x et à la somme $xx_0 + y^2$, substitution qui peut s'écrire

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{ca_0(xx_0 + y^2) + a_0dx + cb_0x_0 + db_0}{cc_0(xx_0 + y^2) + dc_0x + d_0cx_0 + dd_0},\\ x'x'_0 + y'^2 &= \frac{aa_0(xx_0 + y^2) + ba_0x + b_0ax_0 + bb_0}{cc_0(xx_0 + y^2) + dc_0x + d_0cx_0 + dd_0}; \end{aligned} \right.$$

à un système de valeurs de la quantité complexe x et de la quantité positive y correspond par ces formules un système parfaitement déterminé de x' et y' (y' étant positif comme y). Ce mode de transformation forme d'ailleurs évidemment un groupe, quand a, b, c, d prennent toutes les valeurs complexes satisfaisant à la relation

$$ad - bc = 1;$$

on peut donner une forme géométrique à ce résultat. Soient $O\xi$, $O\eta$,

$O\zeta$ un système d'axes de coordonnées rectangulaires et considérons le demi-espace situé au-dessus du plan des $\xi\eta$; à chaque point (ξ, η, ζ) correspond un système de valeurs de la quantité complexe x et de la quantité positive y, si l'on pose

$$x = \xi + i\eta, \quad y = \zeta,$$

et réciproquement à tout système (x, y) correspond dans le demi-espace un point (ξ, η, ζ).

A la substitution (S) correspond donc une transformation du point (ξ, η, ζ) en un autre point du demi-espace. Nous sommes ainsi conduit, par les considérations algébriques qui précèdent, au mode de transformation des figures dans un demi-espace, dont M. Poincaré a déjà fait usage dans son Mémoire sur les groupes kleinéens et auquel il avait été amené par des considérations géométriques.

3. Dans ce qui précède, les coefficients a, b, c, d étaient des constantes complexes quelconques de déterminant un. Supposons maintenant que a, b, c et d soient des *entiers* complexes quelconques satisfaisant à la relation

$$ad - bc = 1.$$

Je dis que dans ce cas *les substitutions* (S) *formeront un groupe discontinu* pour tout point du demi-espace non situé dans le plan des $\xi\eta$.

Pour démontrer ce fait, il suffit d'établir qu'il existe dans le demi-espace une certaine région dans laquelle il n'y aura, en général, qu'un seul point (et dans tous les cas un nombre limité) correspondant par des substitutions du groupe à un point quelconque.

Nous allons faire usage du théorème relatif à la réduction des formes quadratiques binaires définies à indéterminées conjuguées. Étant donnée une telle forme

$$AXX_0 + BXY_0 + B_0X_0Y + CYY_0 \qquad (BB_0 - AC < 0, \quad A > 0, \quad C > 0),$$

dont les coefficients sont quelconques, on peut trouver une substitution

$$(X, Y, dX + bX, cX + aY),$$

où a, b, c, d sont des entiers complexes de déterminant un, telle que, dans la forme transformée

$$A'XX_0 + B'XY_0 + B'_0X_0Y + C'YY_0,$$

on ait

$$A' \leq C', \quad -A' \leq 2m' \leq A', \quad -A' \leq 2n' \leq A'$$

en posant

$$B' = m' + n'i;$$

cette substitution sera, en général, unique; dans tous les cas, il n'y en aura qu'un nombre limité.

Ceci rappelé, soit (x, y) un système de valeurs correspondant à un point arbitraire du demi-espace et prenons la forme (I') correspondante; cette forme est définie, et l'on peut trouver une substitution à coefficients entiers

$$(X, Y, dX + bY, cX + aY)$$

qui la réduise : s'il y en a plus d'une, elles seront en nombre limité. Or à la substitution précédente correspond la substitution (S'), effectuée sur (x, y); mais, d'après les inégalités qui expriment la réduction, on voit que, pour le système transformé (x', y'), la partie réelle et le coefficient de i dans x' seront compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et l'on aura, en outre,

$$x'x'_0 + y'^2 \geq 1.$$

Revenons au point (ξ, η, ζ) et soit (ξ', η', ζ') le transformé correspondant à x' et y', on aura

$$-\tfrac{1}{2} \leq \xi' \leq \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leq \eta' \leq \tfrac{1}{2}$$

et

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \geq 1;$$

nous sommes donc assuré qu'il y a, en général, un seul point (ξ', η', ζ') situé dans le volume limité par les quatre plans $\xi = \frac{1}{2}$, $\xi = -\frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{2}$, $\eta = -\frac{1}{2}$ et extérieur à la sphère de rayon un, qui corresponde par les substitutions du groupe à un point quelconque (ξ, η, ζ) du demi-espace. Le groupe est donc discontinu et nous trouvons, en même temps, son *polyèdre fondamental;* celui-ci est entièrement analogue au triangle fondamental que l'on obtient dans le demi-plan et sur lequel nous nous sommes arrêté au commencement de cet article.