BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur une série à loi alternée

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 78-90
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__78_1>

Sur une série à loi alternée; par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 20 juin 1884.)

1. Nous rappellerons, en commençant, une formule que nous avons donnée dernièrement dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e série, t. III, p. 71).

Considérons une série définie par la loi de récurrence

$$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$$

et les valeurs des termes initiaux U_0 et U_1, supposées absolument quelconques.

Nous appelons *série fondamentale* de la proposée celle qui s'obtient en conservant la même loi de récurrence

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2},$$

et en prenant pour valeurs des termes initiaux

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1.$$

On sait que le terme u_n d'une telle série est donnée par la formule

$$(1) \qquad u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

α et β étant les racines de l'*équation génératrice*

$$z^2 - az - b = 0$$

[formule (7) de notre Mémoire]. Nous avons démontré [formule (12)] que les termes de la première série peuvent se déduire de ceux de sa série fondamentale par la formule

$$(2) \qquad U_n = U_1 u_n + bU_0 u_{n-1},$$

dont la présente Note n'est qu'une application.

2. L'idée de la série à loi alternée dont nous allons parler nous a été suggérée par la question de Géométrie suivante :

Étant donné un triangle ABC, *on forme le triangle* $A_0B_0C_0$ (¹) *qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle* ABC, *puis le triangle* $A_1B_1C_1$ *qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle* $A_0B_0C_0$, *et ainsi de suite. Trouver les coordonnées des sommets de l'un quelconque* $A_kB_kC_k$ *des triangles de cette suite en fonction des coordonnées des sommets du triangle* ABC.

Nous représenterons les coordonnées de A par x et y, celles de B par x' et y', celles de C par x'' et y'', et, d'une manière générale, celles de A_k par x_k et y_k, celles de B_k par x'_k et y'_k, celles de C_k par x''_k et y''_k. Nous appellerons de plus le triangle $A_kB_kC_k$ *triangle* (k).

(¹) On suppose que le point A_0 est le milieu de BC, le point B_0 le milieu de AC et le point C_0 le milieu de AB.

Il nous suffit de considérer les abscisses, le calcul des ordonnées étant identiquement le même.

Un calcul direct donne

$$
\begin{array}{lll}
x_0 = \dfrac{x' + x''}{2}, & x'_0 = \dfrac{x + x''}{2}, & x''_0 = \dfrac{x + x'}{2}; \\[2ex]
x_1 = \dfrac{2x + x' + x''}{4}, & x'_1 = \dfrac{x + 2x' + x''}{4}, & x''_1 = \dfrac{x + x' + 2x''}{4}; \\[2ex]
x_2 = \dfrac{2x + 3x' + 3x''}{8}, & x'_2 = \dfrac{3x + 2x' + 3x''}{8}, & x''_2 = \dfrac{3x + 3x' + 2x''}{8}; \\[2ex]
x_3 = \dfrac{6x + 5x' + 5x''}{16}, & x'_3 = \dfrac{5x + 6x' + 5x''}{16}, & x''_3 = \dfrac{5x + 5x' + 6x''}{16}, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

3. Il suffit d'observer la façon dont se forment méthodiquement ces expressions successives pour en saisir immédiatement la loi.

Pour les dénominateurs, aucune difficulté; au triangle (k) correspond le dénominateur 2^{k+1}.

Pour les numérateurs, la loi est assez longue à énoncer :

Prenons le triangle (k); les numérateurs de x_k, x'_k et x''_k sont des trinômes du premier degré en x, x' et x'', dont les coefficients sont les trois mêmes nombres permutés circulairement. Le plus petit de ces nombres est égal au plus grand moins un, et le troisième est égal au plus grand ou au plus petit, selon que k est pair ou impair. Cette remarque ramène la recherche des trois coefficients à celle du plus grand seulement. Représentant celui-ci par U_k, nous voyons que les trois coefficients sont

$$U_k, \quad U_k, \quad U_k - 1$$

si k est pair, et

$$U_k, \quad U_k - 1, \quad U_k - 1$$

si k est impair.

Comment, dans chaque expression, répartir les trois coefficients entre x, x' et x''? Que k soit pair ou impair, deux des coefficients sont égaux et le troisième différent; nous appellerons ce coefficient le *coefficient à part*. Cela posé, nous pourrons dire que le coefficient à part affecte x dans l'expression de x_k, x' dans l'expression de x'_k et x'' dans l'expression de x''_k.

4. Si donc nous supposons k pair ($k = 2n$), nous avons

$$x_{2n} = \frac{(U_{2n} - 1)x + U_{2n}x' + U_{2n}x''}{2^{2n+1}},$$

que nous pouvons écrire

$$x_{2n} = \frac{U_{2n}(x + x' + x'') - x}{2^{2n+1}}.$$

Posant $x + x' + x'' = S_x$, et supposant que l'on remplace successivement le signe ( ) par l'absence de signe, par le signe prime et par le signe seconde, on aura, d'une manière générale,

$$x_{2n}^{(\ )} = \frac{U_{2n} S_x - x^{(\ )}}{2^{2n+1}}. \tag{3}$$

Si nous supposons maintenant k impair ($k = 2n + 1$), nous avons

$$x_{2n+1} = \frac{U_{2n+1}x + (U_{2n+1} - 1)x' + (U_{2n+1} - 1)x''}{2^{2n+2}}$$

ou

$$x_{2n+1} = \frac{(U_{2n+1} - 1)(x + x' + x'') + x}{2^{2n+2}};$$

et, d'une manière générale, en employant la même notation que précédemment,

$$x_{2n+1}^{(\ )} = \frac{(U_{2n+1} - 1)S_x + x^{(\ )}}{2^{2n+2}}. \tag{4}$$

5. Les formules (3) et (4) peuvent être réunies en une seule, plus générale, comprenant à la fois les cas où k est pair et ceux où il est impair; il suffit pour cela de représenter par $R\left(\frac{k}{2}\right)$ le reste de la division de k par 2, reste qui est 1 ou 0; on a alors, quel que soit l'entier k,

$$x_k^{(\ )} = \frac{\left[U_k - R\left(\frac{k}{2}\right)\right] S_x - (-1)^k x^{(\ )}}{2^{k+1}}; \tag{5}$$

par suite, de même

$$y_k^{(\ )} = \frac{\left[U_k - R\left(\frac{k}{2}\right)\right] S_x - (-1)^k y^{(\ )}}{2^{k+1}}. \tag{5'}$$

Les formules (5) et (5') résoudront complètement le problème lorsque nous aurons obtenu l'expression de U_k en fonction de son rang k, expression que nous allons rechercher maintenant.

6. On aperçoit immédiatement la loi de formation récurrente des nombres U; on a

$$\begin{aligned} U_0 &= 1, \\ U_1 &= 2U_0, \\ U_2 &= 2U_1 - 1, \\ U_3 &= 2U_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et d'une manière générale

$$\begin{aligned} U_{2n} &= 2U_{2n-1} - 1, \\ U_{2n+1} &= 2U_{2n}. \end{aligned}$$

Au lieu de faire le calcul direct des termes de cette série, nous allons généraliser la loi, quitte à remplacer ensuite, dans les résultats obtenus, les coefficients généraux par les valeurs particulières qu'ils ont dans la série précédente.

7. Considérons donc la série définie par la valeur initiale

$$U_0 = a,$$

et les deux formules de récurrence

$$\begin{aligned} U_{2n-1} &= \alpha U_{2n-2} + \beta, \\ U_{2n} &= \gamma U_{2n-1} + \delta, \end{aligned}$$

α, β, γ, δ et a étant absolument quelconques.

Éliminant U_{2n-1} entre les deux formules précédentes, on a

$$U_{2n} = \alpha\gamma U_{2n-2} + \beta\gamma + \delta;$$

de même,

$$U_{2n-2} = \alpha\gamma U_{2n-4} + \beta\gamma + \delta.$$

Retranchant ces deux égalités l'une de l'autre, nous avons

$$U_{2n} = (\alpha\gamma + 1) U_{2n-2} - \alpha\gamma U_{2n-4}.$$

Représentant alors les termes de rang pair de la série par la lettre P, de façon que

$$P_0 = U_0, \quad P_1 = U_2, \quad \ldots, \quad P_n = U_{2n},$$

nous voyons que ces quantités forment à leur tour une série récurrente définie par les valeurs initiales

$$P_0 = a,$$
$$P_1 = a\alpha\gamma + \beta\gamma + \delta$$

et par la formule

$$P_n = (\alpha\gamma + 1)P_{n-1} - \alpha\gamma P_{n-2},$$

c'est-à-dire rentrant dans le type de celles dont il a été parlé au nº **1**.

La série fondamentale de cette série est définie par

$$p_0 = 0,$$
$$p_1 = 1,$$
$$p_n = (\alpha\gamma + 1)p_{n-1} - \alpha\gamma p_{n-2};$$

son équation génératrice est

$$z^2 - (\alpha\gamma + 1)z + \alpha\gamma = 0$$

et a pour racines

$$z_1 = \alpha\gamma,$$
$$z_2 = 1.$$

Par suite, l'application de la formule (1) montre que

$$p_n = \frac{(\alpha\gamma)^n - 1}{\alpha\gamma - 1}.$$

Il en résulte, d'après la formule (2), pour P_n, la valeur

$$P_n = (a\alpha\gamma + \beta\gamma + \delta)\frac{(\alpha\gamma)^n - 1}{\alpha\gamma - 1} - a\alpha\gamma\frac{(\alpha\gamma)^n - 1}{\alpha\gamma - 1}$$

ou, après réduction et remplaçant P_n par U_{2n},

$$U_{2n} = \frac{(\alpha\gamma)^n[a(\alpha\gamma - 1) + \beta\gamma + \delta] - (\beta\gamma + \delta)}{\alpha\gamma - 1}. \tag{6}$$

On a ensuite

$$U_{2n+1} = \alpha U_{2n} + \beta = \frac{(\alpha\gamma)^n\alpha[a(\alpha\gamma - 1) + \beta\gamma + \delta] - (\alpha\delta + \beta)}{\alpha\gamma - 1}. \tag{7}$$

8. Les formules (6) et (7) peuvent encore être réunies en une seule; si l'on représente, comme précédemment, par $R\left(\frac{k}{2}\right)$ le reste de la division de k par 2, et si l'on désigne par $E\left(\frac{k}{2}\right)$ la partie entière du quotient de k par 2, on voit que la formule

$$(8)\qquad U_k = \frac{(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{k}{2}\right)}\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)}[a(\alpha\gamma-1)+\beta\gamma+\delta]-\left(\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)}\delta+\gamma^{R\left(\frac{k+1}{2}\right)}\beta\right)}{\alpha\gamma-1}$$

résume les deux précédentes et convient à toute valeur de k.

Remarquons que, dans le cas où $\alpha=\gamma$, cette formule se simplifie beaucoup, parce qu'on a

$$(\alpha^2)^{E\left(\frac{k}{2}\right)}\,\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)}=\alpha^k;$$

la formule devient donc alors

$$(8')\qquad U_k = \frac{\alpha^k[a(\alpha^2-1)+\beta\alpha+\delta]-\left(\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)}\delta+\alpha^{R\left(\frac{k+1}{2}\right)}\beta\right)}{\alpha^2-1}.$$

9. Pour la série particulière d'où nous sommes parti, nous avions

$$\alpha=\gamma=2,\quad \beta=0,\quad \delta=-1,\quad a=1;$$

la formule (8') donne par ces substitutions

$$(9)\qquad U_k=\frac{2^{k+1}+2^{R\left(\frac{k}{2}\right)}}{3}.$$

Cette dernière formule, rapprochée des formules (5) et (5'), résout le problème que nous nous étions proposé en commençant; on a

$$x_k^{()}=\frac{\left[\dfrac{2^{k+1}+2^{R\left(\frac{k}{2}\right)}}{3}-R\left(\dfrac{k}{2}\right)\right]S_x-(-1)^k x^{()}}{2^{k+1}},$$

ou

$$(10)\qquad x_k^{()}=\frac{S_x}{3}+\frac{\left[\dfrac{2^{R\left(\frac{k}{2}\right)}}{3}-R\left(\dfrac{k}{2}\right)\right]S_x-(-1)^k x^{()}}{2^{k+1}}.$$

De même,

$$(10)\qquad y_k^{()} = \frac{S_y}{3} + \frac{\left[\frac{2^{R\left(\frac{k}{2}\right)}}{3} - R\left(\frac{k}{2}\right)\right] S_y - (-1)^k y^{()}}{2^{k+1}}.$$

10. Si nous posons $x_k + x'_k + x''_k = S_{x_k}$, nous avons, en remplaçant successivement dans la formule (10) $x_k^{()}$ par x_k, x'_k et x''_k, et faisant la somme de ces trois expressions

$$S_{x_k} = S_x + \frac{\left[2^{R\left(\frac{k}{2}\right)} - 3R\left(\frac{k}{2}\right) - (-1)^k\right] S_x}{2^{k+1}}.$$

Or on vérifie aisément que, quel que soit l'entier k, pair ou impair, on a identiquement

$$2^{R\left(\frac{k}{2}\right)} - 3R\left(\frac{k}{2}\right) - (-1)^k = 0;$$

par suite,

$$S_{x_k} = S_x;$$

de même,

$$S_{y_k} = S_y.$$

Ces deux égalités montrent que le triangle $A_kB_kC_k$ a même centre de gravité que le triangle ABC, propriété qu'il est bien aisé de démontrer par la Géométrie.

11. Dans l'expression (10) de $x_k^{()}$, le premier terme est indépendant de k; le second terme a un numérateur qui ne contient que des fonctions de k finies, quel que soit k, tandis que son dénominateur croît indéfiniment avec k : ce second terme tend donc vers zéro lorsque k croît au delà de toute limite. Par suite, quand k tend vers l'infini,

$$\lim x_k^{()} = \frac{S_x}{3},$$

$$\lim y_k^{()} = \frac{S_y}{3},$$

c'est-à-dire que la limite commune des positions qu'occupent les trois sommets des triangles que nous considérons, lorsqu'on prolonge indéfiniment l'inscription de ces triangles les uns dans les autres, est le centre de gravité commun de tous ces triangles, ce qui était bien évident. Nous avons ainsi des sortes de vérifications de nos formules.

12. Nous signalerons une remarque qui résulte de la formule (6). Si l'on pose

$$\alpha\gamma = \lambda, \tag{11}$$

$$\beta\gamma + \delta = \mu, \tag{12}$$

cette formule s'écrit

$$U_{2n} = \frac{\lambda^n[a(\lambda - 1) + \mu] - \mu}{\lambda - 1}. \tag{13}$$

La valeur de U_{2n} ne dépend que de λ, μ, a; si donc on conserve la même valeur a pour le terme initial, et que l'on choisisse pour α, β, γ, δ des systèmes de valeurs quelconques, mais satisfaisant aux relations (11) et (12), on formera autant de séries dans lesquelles les termes de rang pair seront les mêmes, à rang égal.

13. Nous allons donner maintenant la formule générale qui permet de calculer

$$\sum_{i=0}^{i=k} U_i = U_0 + U_1 + \ldots + U_k,$$

quel que soit k, U_i étant le terme dont l'expression résulte de la formule (8) après remplacement de k par i. On a, d'après cette formule,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{i=k} U_i = {} & \frac{a(\alpha\gamma - 1) + \beta\gamma + \delta}{\alpha\gamma - 1} \sum_{i=0}^{i=k} \left[(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{i}{2}\right)} \alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)}\right] \\ & - \frac{1}{\alpha\gamma - 1} \times \left[\sum_{i=0}^{i=k} \left(\alpha^{R\left(\frac{2}{i}\right)} \delta\right) + \sum_{i=0}^{i=k} \left(\gamma^{R\left(\frac{i+1}{2}\right)} \beta\right)\right].\end{aligned} \tag{14}$$

Évaluons les trois sommes qui figurent au second membre. Pour la première, on voit immédiatement que, si k est pair ($k = 2n$), on a

$$\sum_{i=0}^{i=2n} \left[(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{i}{2}\right)} \alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)}\right] = \frac{(\alpha\gamma)^{n+1} - 1 + \alpha[(\alpha\gamma)^n - 1]}{\alpha\gamma - 1},$$

et si k est impair ($k = 2n + 1$),

$$\sum_{i=0}^{i=2n+1} \left[(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{i}{2}\right)} \alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)}\right] = \frac{(\alpha\gamma)^{n+1} - 1 + \alpha[(\alpha\gamma)^{n+1} - 1]}{\alpha\gamma - 1}.$$

Nous pourrons réunir ces deux formules en une seule, convenant à toute valeur de l'entier k, de la manière suivante :

$$(15) \qquad \sum_{i=0}^{i=k} \left[(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{i}{2}\right)} \alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)}\right] = \frac{(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{k}{2}\right)+1} - 1 + \alpha\left[(\alpha\gamma)^{G\left(\frac{k}{2}\right)} - 1\right]}{\alpha\gamma - 1},$$

en représentant par $G\left(\frac{k}{2}\right)$ la différence $k - E\left(\frac{k}{2}\right)$.

On obtient encore immédiatement

$$\sum_{i=0}^{i=2n} \left(\alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)} \delta\right) = \delta(n + 1 + n\alpha),$$

$$\sum_{i=0}^{i=2n+1} \left(\alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)} \delta\right) = \delta[n + 1 + (n+1)\alpha],$$

formules qui conduisent à la suivante :

$$(16) \qquad \sum_{i=0}^{i=k} \left(\alpha^{R\left(\frac{i}{2}\right)} \delta\right) = \delta\left[E\left(\frac{k}{2}\right) + 1 + \alpha G\left(\frac{k}{2}\right)\right].$$

On trouve de la même façon

$$\sum_{i=0}^{i=2n} \left(\gamma^{R\left(\frac{i+1}{2}\right)} \beta\right) = \beta[n + (n+1)\gamma],$$

$$\sum_{i=0}^{i=2n+1} \left(\gamma^{R\left(\frac{i+1}{2}\right)} \beta\right) = \beta[n + 1 + (n+1)\gamma];$$

d'où l'on conclut que, d'une manière générale,

$$(17) \qquad \sum_{i=0}^{i=k} \left(\gamma^{R\left(\frac{i+1}{2}\right)} \beta\right) = \beta\left\{G\left(\frac{k}{2}\right) + \gamma\left[E\left(\frac{k}{2}\right) + 1\right]\right\}.$$

Le rapprochement des formules (14), (15), (16) et (17) montre que

$$(18)\quad \sum_{i=0}^{i=k} U_i = \left\{ \frac{\begin{gathered}[a(\alpha\gamma-1)+\beta\gamma+\delta]\left\{(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{k}{2}\right)+1}-1+\alpha\left[(\alpha\gamma)^{G\left(\frac{k}{2}\right)}-1\right]\right\}\\ -(\alpha\gamma-1)\left(\delta\left[E\left(\frac{k}{2}\right)+1+\alpha G\left(\frac{k}{2}\right)\right]+\beta\left\{G\left(\frac{k}{2}\right)+\gamma\left[E\left(\frac{k}{2}\right)+1\right]\right\}\right)\end{gathered}}{(\alpha\gamma-1)^2} \right\}.$$

Si $\alpha=\gamma$, il est facile de voir que l'on a, quel que soit l'entier k,

$$(\alpha^2)^{E\left(\frac{k}{2}\right)+1}-1+\alpha\left[(\alpha^2)^{G\left(\frac{k}{2}\right)}-1\right]=(\alpha^{k+1}-1)(\alpha+1);$$

par suite, dans ce cas,

$$(18')\quad \sum_{i=0}^{i=k} U_i = \left\{ \frac{\begin{gathered}[a(\alpha^2-1)+\alpha\beta+\delta](\alpha^{k+1}-1)(\alpha+1)\\ -(\alpha^2-1)\left(\delta\left[E\left(\frac{k}{2}\right)+1+\alpha G\left(\frac{k}{2}\right)\right]+\beta\left\{G\left(\frac{k}{2}\right)+\alpha\left[E\left(\frac{k}{2}\right)+1\right]\right\}\right)\end{gathered}}{(\alpha^2-1)^2} \right\}.$$

14. La somme $\sum_{i=0}^{i=k} U_i$ croît indéfiniment avec k, mais le quotient de cette somme par k, lorsque $\alpha\gamma$ est inférieur à l'unité, tend vers une limite qu'il est facile d'obtenir. En effet, remarquons que, dans ce cas,

$$\lim(\alpha\gamma)^{E\left(\frac{k}{2}\right)+1}=\lim(\alpha\gamma)^{G\left(\frac{k}{2}\right)}=0,$$

et que

$$\lim\frac{E\left(\frac{k}{2}\right)}{k}=\lim\frac{G\left(\frac{k}{2}\right)}{k}=\tfrac{1}{2}.$$

On en conclut que, si $\alpha\gamma<1$, on a, lorsque k tend vers l'infini,

$$(19)\quad \lim\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{i=k}U_i\right)=\frac{\delta(1+\alpha)+\beta(1+\gamma)}{2(1-\alpha\gamma)},$$

et, si $\alpha=\gamma$,

$$(19')\quad \lim\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{i=k}U_i\right)=\frac{\delta+\beta}{2(1-\alpha)}.$$

15. Nous remarquerons, pour terminer, que des formules démontrées pour la série à loi alternée qui vient d'être étudiée on déduit les formules correspondantes relatives à la suite, non alternée, qui est définie par

$$U_0 = a$$

et

$$U_k = \alpha U_{k-1} + \beta,$$

quel que soit k.

Il suffit pour cela de faire $\beta = \delta$ dans les formules (8′), (18′) et (19′), où l'on a déjà supposé $\alpha = \gamma$.

Dans la formule (8′), nous avons l'expression

$$\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)}\delta + \alpha^{R\left(\frac{k+1}{2}\right)}\beta,$$

qui, pour $\delta = \beta$, devient

$$\beta\left(\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)} + \alpha^{R\left(\frac{k+1}{2}\right)}\right).$$

Or, sur les deux quantités $R\left(\frac{k}{2}\right)$ et $R\left(\frac{k+1}{2}\right)$, il y en a toujours une nulle et l'autre égale à l'unité; par suite,

$$\beta\left(\alpha^{R\left(\frac{k}{2}\right)} + \alpha^{R\left(\frac{k+1}{2}\right)}\right) = \beta(1+\alpha),$$

et la formule (8′) donne, après division haut et bas par $1+\alpha$, pour l'expression du terme U_k,

$$U_k = \frac{\alpha^k[a(\alpha-1)+\beta]-\beta}{\alpha-1}. \tag{20}$$

Dans la formule (18′), où l'on fait $\beta = \delta$, on trouve l'expression

$$E\left(\frac{k}{2}\right) + G\left(\frac{k}{2}\right) + 1;$$

or, par définition même de $G\left(\frac{k}{2}\right)$ [formule (15)], on a

$$E\left(\frac{k}{2}\right) + G\left(\frac{k}{2}\right) = k;$$

par suite, la formule (18′) devient, après division haut et bas, par $(1+\alpha)^2$,

$$\sum_{=0}^{i=k} U_i = \frac{[a(\alpha-1)+\beta](\alpha^{k+1}-1)-(\alpha-1)\beta(k+1)}{(\alpha-1)^2}. \tag{21}$$

Enfin, si l'on suppose $\alpha < 1$, la formule (19') montre que l'on a, lorsque k devient infini,

$$\lim\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{i=k} U_i\right) = \frac{\beta}{1-\alpha}. \tag{22}$$