BULLETIN DE LA S. M. F.

A. P. STARKOFF

Sur la résolution des problèmes géométriques par le calcul des variations

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 132-142
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__132_0>

Sur la résolution des problèmes géométriques par le calcul des variations; par M. A. Starkoff.

(Séance du 18 mars 1885.)

Parmi les problèmes géométriques sur le calcul des variations, qui ont pour but la recherche des courbes, on rencontre des questions qui, par la forme des données, peuvent être résolues seulement en prenant l'arc s pour variable indépendante. Encore Moigno ([1]), étant tombé sur des cas de cette nature, a indiqué la voie qu'il faut suivre lorsqu'on prend l'arc s pour variable indépendante. Le procédé proposé par Moigno est fondé sur les considérations suivantes. Comme les accroissements de chaque coordonnée x et y séparément ne doivent jamais être plus grands que l'accroissement de l'arc s, il suit que les relations entre l'arc s et chacune des coordonnées ne sont pas toutes géométriquement possibles. Comme exemple, Moigno indique

$$y = a + bs, \quad \text{où} \quad b > 1,$$

équation géométriquement impossible. Il est évident que dans la résolution des problèmes géométriques sur le calcul des variations, dans le cas où l'arc s est pris pour variable indépendante, les fonctions géométriquement impossibles semblables à celle qui vient d'être citée ne doivent pas entrer dans l'expression sous le signe $\int$. Arrivé à ces conséquences, Moigno indique un moyen pour faire entrer dans la représentation analytique du problème seulement des relations géométriquement possibles entre l'arc s et les coordonnées. A cet effet, il faut introduire dans le problème la condition que les valeurs des dérivées $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ soient renfermées entre les limites $+1$ et -1. Cette condition, à l'avis de Moigno, peut être introduite en supposant que les dérivées dont il s'agit sont liées entre elles par l'équation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

([1]) Moigno, *Calcul des variations*, p. 235, etc. Paris, 1861.

Mais il est évident que cette équation est loin de renfermer tous les cas, c'est-à-dire de déterminer toutes les fonctions pour lesquelles les conditions

$$(2) \qquad +1 > \frac{dx}{ds} > -1 \quad \text{et} \quad +1 > \frac{dy}{ds} > -1$$

sont remplies (¹). C'est pour cela que l'introduction de l'équation (1) dans l'expression analytique d'un problème géométrique sur le calcul des variations, introduction effectuée pour restreindre ce problème par les conditions (2), en retranche une infinité de relations géométriquement possibles pour lesquelles, quoique l'équation (1) n'ait pas lieu, les conditions (2) sont remplies. Par conséquent la résolution du problème sous cette forme n'aura pas le degré de généralité voulue, qui peut être obtenu seulement par l'introduction dans la représentation du problème de toutes les relations géométriquement possibles entre l'arc s et les coordonnées x et y.

D'autre part, il est facile de voir que pour chaque point *ordinaire* (²) de la courbe (*fig.* 1) a lieu l'équation

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 = ds^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 1 = 0,$$

qui cesse d'exister au point *singulier* (*fig.* 2). (Pour mon but, il

Fig. 1.

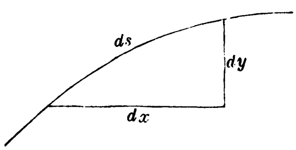
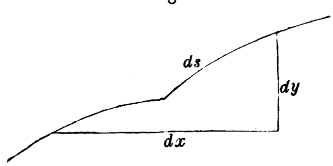


Fig. 2.



suffit d'avoir en vue les points *anguleux*). Mais les conditions (2) sont remplies indifféremment dans les points ordinaires et dans les points singuliers en exigeant seulement que la ligne soit con-

(¹) Par exemple, l'équation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^m + \left(\frac{dy}{ds}\right)^n - 1 = 0,$$

où m et n sont réelles et positives, présente un cas plus général que l'équation (1).

(²) JORDAN. *Cours d'Analyse.* t. I, p. 198, etc. Paris, 1882.

tinue suivant sa longueur. Donc l'équation (1) exprime la condition qui détermine les courbes continues, construites suivant toute leur longueur d'après une loi donnée, tandis que les inégalités (2) peuvent également se rapporter soit aux courbes composées de points ordinaires, soit aux lignes continues dans leur longueur ayant un nombre indéterminé de points singuliers, c'est-à-dire aux lignes brisées qui se composent de morceaux de lignes courbes (*fig.* 3) ou droites (*fig.* 4). Donc la résolution du pro-

Fig. 3.

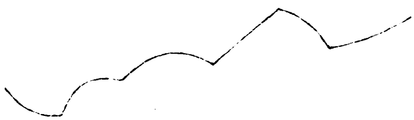
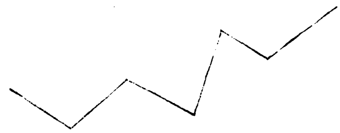


Fig. 4.



blème géométrique sur le calcul des variations avec l'introduction de l'équation (1) équivaut à éliminer les lignes brisées et à tenir compte seulement des courbes construites suivant toute leur longueur, d'après une loi déterminée. Au contraire, la résolution du même problème, d'après les conditions (2), a un caractère plus général et embrasse aussi bien les lignes courbes que brisées.

Dans la recherche d'un maximum ou d'un minimum de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx, \tag{3}$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont les dérivées successives de y, on tient compte seulement des fonctions $y = \mathrm{F}(x)$ qui représentent des courbes continues, c'est-à-dire les valeurs de y, pour lesquelles l'équation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

a lieu en général. Si, dans ce cas, on obtient dans la solution même des points singuliers, l'intégrale ne sera ni maximum, ni minimum [1].

---

(1) En effet, soient, par exemple,

$$u = \int_{x_0}^{x_1} v\, dx \quad \text{et} \quad v = f(x, y, y_1);$$

Mais, dans la recherche d'un maximum ou d'un minimum de l'intégrale

$$(4)\qquad \int_{s_0}^{s_1}(s, x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\,ds,$$

limitée seulement par les conditions

$$(2)\qquad +1 > \frac{dx}{ds} > -1 \quad \text{et} \quad +1 > \frac{dy}{ds} > -1,$$

intervient encore outre *toutes* les fonctions *qui entrent dans l'intégrale* (3) et qui représentent des courbes, une nouvelle série de fonctions qui représentent des lignes brisées et qui disparaissent de l'intégrale (3). Mais, si nous limitons l'intégrale (4) par l'introduction de l'équation (1), nous en excluons par cela même les lignes brisées, et le résultat obtenu sera complètement identique avec celui que l'on trouve dans la recherche du maximum ou du minimum de l'intégrale (3). Donc, la résolution du problème géométrique par le calcul des variations sous la forme

$$(5)\qquad \delta\int_{s_0}^{s_1}\varphi(s, x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)\,ds = 0,$$

---

la condition pour un maximum ou un minimum sera

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial v}{\partial y_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y_1} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial y_1}y_1 - \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}y_2 = 0.$$

Soit la courbe trouvée

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

nous avons

$$(\beta)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y_1^2 + \frac{\partial F}{\partial p}y_2 = 0.$$

En substituant les valeurs de y_1 et y_2, déterminées par les équations (β), dans l'expression (α), nous obtenons

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y_1}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial y_1}\,\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y_1^2\right) = 0.$$

Mais, pour le point singulier, nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

par suite $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} = 0$, et l'intégrale donnée ne sera ni maximum ni minimum.

avec les conditions (2), sera plus générale que celle de la forme

$$(6)\qquad \delta\int_{x_0}^{x_1} \psi(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,dx = 0,$$

parce que dans le cas (5), outre les courbes, on introduit dans l'intégrale aussi les lignes brisées.

Pour illustrer ce qui a été dit, nous examinerons le problème de Newton sur la surface de moindre résistance. La voie généralement usitée pour la résolution de ce problème consiste à rendre égale à zéro la première variation de l'intégrale

$$\int yy_1^3\,ds,$$

après l'avoir préalablement réduite à la variable indépendante x à l'aide des formules

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad dy = p\,dx, \quad y_1 = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

en vertu desquelles nous avons

$$\delta\int yy_1^3\,ds = \delta\int yy_1^2\,dy = \delta\int y\frac{p^3}{1+p^2}\,dx = 0;$$

d'où, les opérations indiquées effectuées, on trouve l'équation de la courbe

$$y = c_1\frac{(1+p^2)^2}{p^3}, \quad x = c_1\left(\frac{3}{4}\frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^2} + \log p\right) + c_2.$$

On obtient la même courbe en résolvant le problème sous la forme

$$(7)\qquad \delta\int [yy_1^3 + \lambda(x_1^2 + y_1^2 - 1)]\,ds = 0.$$

En effet, on tire de (7) deux équations différentielles

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{d}{ds}\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{ds}\frac{\partial v}{\partial y_1} = 0,$$

dont l'intégrale sera [1]

$$(8)\qquad v = x_1\frac{\partial v}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial v}{\partial y_1} \quad \text{ou} \quad \lambda + yy_1^3 = 0.$$

---

[1] MOIGNO, *Calcul des variations*, p. 240. Paris, 1861.

D'autre part, de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{d}{ds}\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0,$$

v ne contenant pas x et $\frac{\partial v}{\partial y}$ étant égal à zéro, nous obtiendrons

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = -2c_1 \quad \text{ou} \quad x_1\lambda + c_1 = 0,$$

d'où la valeur de λ se déterminera ainsi

$$\lambda = -\frac{c_1}{x_1}.$$

En portant cette valeur dans l'intégrale (8), nous avons

$$y x_1 y_1^3 = c_1,$$

d'où, en substituant pour x_1 et y_1 leurs valeurs

$$x_1 = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

on trouve

$$y = c_1\frac{(1+p^2)^2}{p^3},$$

l'équation de la même courbe que nous avons obtenue en prenant x pour variable indépendante.

Mais Legendre (¹) avait déjà indiqué que la solution obtenue ne présente pas un minimum et qu'une ligne quelconque de zigzag ou brisée donne la surface de moindre résistance. En introduisant, conformément à ce qui a été indiqué plus haut, cette ligne brisée dans la représentation analytique du problème, c'est-à-dire en prenant la variation de l'intégrale

$$\delta \int y y_1^3\, ds,$$

sans introduire l'équation (1) comme restriction, nous avons

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{ds}\frac{\partial v}{\partial y_1} = 0$$

(¹) LEGENDRE, *Mémoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations* (*Mémoires de l'Académie de Paris*, p. 24; 1786).

ou

$$y_1\left(y_1^2 + 3y\,\frac{dy_1}{ds}\right) = 0,$$

d'où

$$y_1 = \frac{dy}{ds} = 0 \quad \text{et} \quad y_1^2 + 3y\,\frac{dy_1}{ds} = 0.$$

La première de ces équations appartient à l'axe de révolution ou à chaque droite qui lui est parallèle, mais la seconde équation, après avoir séparé les variables et substitué

$$ds = \frac{dy}{y_1}$$

à ds, donne

$$\frac{dy}{y} + 3\,\frac{dy_1}{y_1} = 0 \quad \text{ou} \quad yy_1^3 = c_1;$$

d'où

(9) $$y = \frac{c_1}{y_1^3} \quad \text{ou} \quad y = c_1\,\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3},$$

équation de la courbe relativement à laquelle Legendre (*Mém. cit.*, p. 24) a déjà remarqué que sur elle l'intégrale de la résistance a un minimum absolu.

Pour la détermination de x, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}} \quad \text{ou} \quad dx = \frac{\sqrt{1-y_1^2}}{y_1}\,dy,$$

d'où

$$x = \int \frac{\sqrt{1-y_1^2}}{y_1}\,dy + c_2 = \frac{\sqrt{1-y_1^2}}{y_1} + \int \frac{y\,dy_1}{y_1^2\sqrt{1-y_1^2}} + c_2.$$

En effectuant ici l'intégration indiquée en y substituant la valeur de y tirée de l'expression (9) et posant, pour abréger,

$$\sqrt[3]{c_1} = a \quad \text{et} \quad -\tfrac{1}{8}c_1 \log c_1 + c_2 = b,$$

nous obtenons l'équation de la courbe sous forme finie

$$x = \frac{3}{8}\,\frac{1}{a}\left[\left(2y - a^3 y^{\frac{1}{3}}\right)\sqrt{y^{\frac{2}{3}} - a^2} + a^4 \log\left(y^{\frac{1}{3}} - \sqrt{y^{\frac{2}{3}} - a^2}\right)\right] + b.$$

Il est facile de voir que sur cette courbe l'intégrale de la résistance a une valeur moindre que sur la courbe de Newton. En effet, sur la courbe de Newton, déterminée par l'équation

$$y = c_1 \frac{(1+p^2)^2}{p^3},$$

l'intégrale de la résistance obtient la valeur

$$k\int y y_1^3\, ds = kc_1 \int \frac{(1+p^2)^2}{p^3} \frac{p^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} ds = kc_1 \int \sqrt{1+p^2}\, ds.$$

Mais, sur la courbe de Legendre indiquée ici et déterminée par l'équation

$$y = c_1 \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3},$$

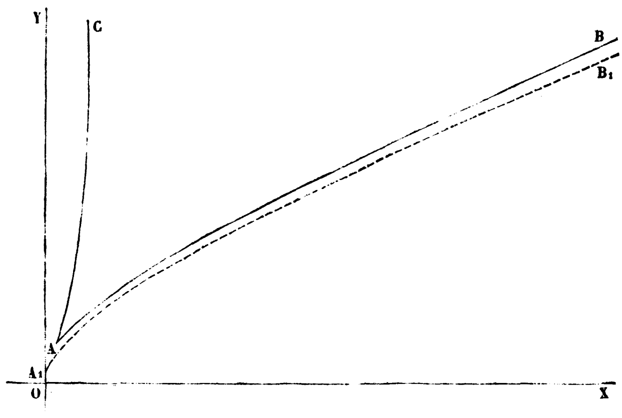
nous avons

$$k\int y y_1^3\, ds = kc_1 \int \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3} \frac{p^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} ds = kc_1 \int ds,$$

ce qu'il s'agissait de montrer.

Sur la *fig.* 5 la courbe continue est celle de Newton, la courbe

Fig. 5.



pointillée est celle de Legendre; elles sont construites avec les mêmes valeurs des constantes arbitraires.

Il est facile d'obtenir les mêmes résultats aussi dans le cas où la surface de la moindre résistance est limitée par une condition, par celle, par exemple, de contenir un volume donné. Dans ce cas la résolution du problème, la coordonnée x étant prise pour variable indépendante, s'obtient de l'expression

$$\delta \int \left(y \frac{p^3}{1+p^2} + \alpha y^2 \right) dx = 0,$$

ou de l'expression

$$\delta \int \left[y y_1'^3 + \alpha y^2 \sqrt{1 - y_1'^2} + \lambda (x_1'^2 + y_1'^2 - 1) \right] ds = 0;$$

dans l'un et dans l'autre cas on obtient comme solution la courbe déterminée par l'équation

$$\alpha y^2 + c_1 = \frac{2 y p^3}{(1+p^2)^2}. \tag{10}$$

Mais, comme M. Todhunter a montré (¹) que la solution obtenue ne présente pas un minimum, et que l'intégrale de la résistance sur une certaine ligne brisée formant par la révolution un solide de même volume a une valeur moindre. En introduisant cette ligne brisée dans la représentation analytique du problème en se fondant sur les considérations ci-dessus exposées, c'est-à-dire en admettant l'arc s pour variable indépendante, sans restreindre cette variable par l'équation (1), nous obtenons

$$\delta \int (y y_1'^3 + \alpha y^2 \sqrt{1 - y_1'^2})\, ds = 0;$$

d'où il est facile de trouver l'équation de la courbe

$$\alpha y^2 + \frac{c_1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{2 y p^3}{(1+p^2)^2}. \tag{11}$$

Afin de montrer que le minimum de l'intégrale de la résistance, déterminé par la courbe (11), est moindre que celui qui est déterminé par la courbe (10), nous résolvons les deux équations (11) et (10) par rapport à y, et nous obtenons de (11)

$$y = \frac{1}{\alpha} \frac{p^3}{(1+p^2)^2} \left[1 - \sqrt{1 - \alpha c_1 \frac{(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}{p^6}} \right], \tag{11$_1$}$$

(¹) Todhunter, *Researches in the calculus of variations*, p. 200. London, 1871.

et de l'équation (10) nous trouvons

$$(10_1)\qquad y = \frac{1}{\alpha}\frac{p^3}{(1+p^2)^2}\left[1-\sqrt{1-\alpha c_1\frac{(1+p^2)^4}{p^6}}\right].$$

En désignant, pour abréger,

$$P = \alpha c_1 \frac{(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}{p^6},$$

et en décomposant dans les expressions (11_1) et (10_1) les radicaux en séries, nous avons, dans le premier cas,

$$(11_2)\qquad \sqrt{1-P} = 1-\frac{P}{2}-\frac{P^2}{8}-\frac{P^3}{16}-\frac{5P^4}{128}-\ldots,$$

et dans le second cas, c'est-à-dire pour (10_1),

$$(10_2)\quad \left\{\begin{aligned} \sqrt{1-P(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} &= 1-\frac{P}{2}(1+p)^{\frac{1}{2}}-\frac{P^2}{8}(1+p^2)\\ &\quad -\frac{P^3}{16}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{5P^4}{128}(1+p^2)^2-\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs des radicaux dans les expressions (11_1) et (10_1) pour y, nous obtenons, pour (11_1),

$$y = \frac{1}{\alpha}\frac{p^3}{(1+p^2)^2}\frac{P}{2}\left(1+\frac{P}{4}+\frac{P^2}{8}+\frac{5P^3}{64}+\ldots\right),$$

et pour (10_1),

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{\alpha}\frac{p^3}{(1+p^2)^2}\frac{P}{2}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}\Big[1&+\frac{P}{4}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}\\ &+\frac{P^2}{8}(1+p^2)+\frac{5P^3}{64}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}+\ldots\Big]. \end{aligned}$$

En introduisant les expressions ainsi obtenues pour les y dans l'intégrale de la résistance

$$k\int yy_1^3\,ds,$$

nous trouvons la valeur de cette intégrale pour la courbe (11),

$$k\int yy_1^3\,ds = \frac{k}{2\alpha}\int\left(1+\frac{P}{4}+\frac{P^2}{8}+\frac{5P^3}{64}+\ldots\right)ds.$$

et, pour la courbe (10),

$$k\int yy_1^{\frac{3}{2}}\,ds = \frac{k}{2\alpha}\int\Big[1+\frac{P}{4}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{P^2}{8}(1+p^2)$$
$$+\frac{5P^3}{64}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}+\ldots\Big](1+p^2)^{\frac{1}{2}}\,ds.$$

Il est évident que la valeur de la première intégrale est plus petite que la valeur de la seconde ([1]). C. Q. F. D.

([1]) A l'aide des mêmes raisonnements il serait facile de faire voir que la surface de révolution à résistance maximum comprenant un volume donné, déterminé conformément aux considérations indiquées plus haut, donne une valeur plus grande pour l'intégrale de la résistance que celle obtenue en prenant la coordonnée x pour variable indépendante.