P. APPELL

Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en série trigonométrique des fonctions elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 13-18

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__13_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en série trigonométrique des fonctions elliptiques; par M. P. Appell.

(Séance du 6 décembre 1884.)

D'après les notations de Jacobi, on a

$$\Theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{nx} q^{n^2},$$

$$\Theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{nx} q^{n^2};$$

ces deux fonctions étant impaires, on a, en posant

$$\frac{\Theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right)}{\Theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right)}=\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{nx}, \tag{1}$$

$$A_{-n}=A_n. \tag{2}$$

Voici comment on peut déterminer les coefficients A_n. En chassant le dénominateur, on déduit de l'équation (1) la suivante :

$$(3)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{nx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{nx} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{nx}.$$

Si l'on effectue le produit de deux séries du second membre, on doit obtenir une série identique au premier membre. En égalant les coefficients de e^{nx}, on obtient ainsi l'équation

$$q^{n^2} = \Sigma (-1)^\nu q^{\nu^2} A_\mu,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de μ et ν dont la somme est n

$$\mu + \nu = n;$$

faisant donc

$$\nu = n - \mu,$$

on a

$$q^{n^2} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (-1)^{n-\mu} q^{n^2 - 2\mu n + \mu^2} A_\mu;$$

d'où, en simplifiant,

$$(4)\qquad (-1)^n = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (-1)^\mu q^{\mu^2 - 2\mu n} A_\mu;$$

en vertu de la relation (2), cette équation peut s'écrire

$$(5)\qquad (-1)^n = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=+\infty} (-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu (q^{2n\mu} + q^{-2n\mu}).$$

En faisant successivement

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

on a ainsi une suite infinie d'équations que doivent vérifier les coefficients

$$A_0, A_1, A_2, \ldots.$$

On en tirera ces coefficients comme il suit.

Considérons les équations du premier degré, déduites de l'équation

$$(6)\qquad (-1)^n = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu (q^{2n\mu} + q^{-2n\mu}),$$

en y faisant successivement

$$n = 0, 1, 2, \ldots, m;$$

ces équations pourront s'écrire

$$(6')\qquad (-1)^n = A_0 + 2\sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu \cos n\mu\omega,$$

en posant, pour abréger,

$$\omega = \frac{2\pi K' i}{K};$$

et, si l'on veut les écrire en détail, on aura le système

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{rl} 1 = & A_0 - 2qA_1 + 2q^4A_2 + \ldots + 2(-1)^m q^{m^2} A_m, \\ -1 = & A_0 - 2qA_1\cos\omega + 2q^4A_2\cos 2\omega + \ldots + 2(-1)^m q^{m^2} A_m \cos m\omega, \\ 1 = & A_0 - 2qA_1\cos 2\omega + 2q^4A_2\cos 4\omega + \ldots + 2(-1)^m q^{m^2} A_m \cos 2m\omega, \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ (-1)^m = & A_0 - 2qA_1\cos m\omega + 2q^4A_2\cos 2m\omega + \ldots + 2(-1)^m q^{m^2} A_m \cos m^2\omega. \end{array}\right.$$

Il est facile de tirer de ces équations l'expression d'un des coefficients A_μ ou plutôt $2(-1)^\mu A_\mu q^{\mu^2}$, μ étant supposé moindre que m.

Pour cela, je remarque que le système plus général

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{rl} 1 = & A + B + \ldots + L, \\ \cos\lambda = & A\cos 2a + B\cos b + \ldots + L\cos l, \\ \cos 2\lambda = & A\cos 2a + B\cos 2b + \ldots + L\cos 2l, \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\ \cos m\lambda = & A\cos ma + B\cos mb + \ldots + L\cos ml, \end{array}\right.$$

où le nombre des lettres $a, b, \ldots, l$ est égal au nombre $(m+1)$ des équations, se résout de la façon suivante. Le déterminant des coefficients des inconnues A, B, ..., L est

$$\Delta(a, b, \ldots, l) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cos a & \cos b & \ldots & \cos l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos ma & \cos mb & \ldots & \cos ml \end{vmatrix},$$

et l'on reconnaît immédiatement [1] que ce déterminant peut s'écrire

$$\Delta(a, b, \ldots, l) = P.\Pi(\cos a - \cos b),$$

---

[1] Ce déterminant, avec d'autres plus généraux, a été développé par M. Fouret (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 2 décembre 1884).

où P est une constante numérique et où le produit Π est étendu à toutes les différences des quantités

$$\cos a,\ \cos b,\ \ldots,\ \cos l,$$

prises deux à deux.

D'après cela, la valeur de A, tirée des équations (8), est

$$A = \frac{\Delta(\lambda, b, c, \ldots, l)}{\Delta(a, b, c, \ldots, l)},$$

c'est-à-dire

$$(9) \qquad A = \frac{(\cos\lambda - \cos b)(\cos\lambda - \cos c)\ldots(\cos\lambda - \cos l)}{(\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c)\ldots(\cos a - \cos l)};$$

en faisant une permutation de lettres, on déduira de là les valeurs de B, C, ..., L.

Remarquons maintenant que les équations (8) se réduisent à (7), si l'on fait, dans (8),

$$A = A_0, \quad B = -2A_1 q, \quad C = 2A_2 q^4, \quad \ldots, \quad L = (-1)^m A_m q^{m^2},$$
$$\lambda = \pi, \quad a = 0, \quad b = \omega, \quad c = 2\omega, \quad \ldots, \quad l = m\omega.$$

On aura donc le coefficient A_0, en faisant ces substitutions dans la formule (9), ce qui donne

$$(10) \qquad A_0 = \frac{(1+\cos\omega)(1+\cos 2\omega)\ldots(1+\cos m\omega)}{(-1+\cos\omega)(-1+\cos 2\omega)\ldots(-1+\cos m\omega)},$$

puis faisant croître m indéfiniment. D'une façon générale, on aura le coefficient

$$(-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu,$$

en faisant, dans (9),

$$\lambda = \pi, \quad a = \mu\omega,$$

$b, c, \ldots, l$ ayant les valeurs

$$0, \ \omega, \ 2\omega, \ \ldots, \ (\mu - 1)\omega, \ (\mu + 1)\omega, \ \ldots, \ m\omega.$$

On a ainsi

$$2(-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu$$
$$= \frac{2(1+\cos\omega)(1+\cos 2\omega)\ldots[1+\cos(\mu-1)\omega][1+\cos\mu+1)\omega]\ldots(1+\cos m\omega)}{(1-\cos\mu\omega)(\cos\omega - \cos\mu\omega)\ldots[\cos(\mu-1)\omega - \cos\mu\omega][\cos(\mu+1)\omega - \cos\mu\omega]\ldots(\cos m\omega - \cos\mu\omega)}.$$

Changeons les signes des μ premiers facteurs du dénominateur, ce qui revient à multiplier les deux membres par $(-1)^\mu$, on peut écrire

$$(11)\quad q^{\mu^2}A_\mu = \frac{1}{(\cos\mu\omega - 1)} \prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\mu\omega - \cos\nu\omega} \prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\nu\omega - \cos\mu\omega}.$$

Ces deux produits qui figurent dans cette expression se transforment ainsi qu'il suit. On a identiquement

$$\frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\mu\omega - \cos\nu\omega} = \frac{q^{2\nu} + q^{-2\nu} + 2}{q^{2\mu} + q^{-2\mu} - q^{2\nu} - q^{-2\nu}}$$
$$= q^{2\mu-2\nu} \frac{(1+q^{2\nu})^2}{(1-q^{2\mu+2\nu})(1-q^{2\mu-2\nu})};$$

d'après cela, on a

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\mu\omega - \cos\nu\omega} = q^{\mu(\mu-1)} \prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{(1+q^{2\nu})^2}{(1-q^{2\mu+2\nu})(1-q^{2\mu-2\nu})};$$

et, si l'on remarque que ν, variant de 1 à $\mu - 1$, la différence $\mu - \nu$ varie également de 1 à $\mu - 1$, et la somme $\mu + \nu$ de $\mu + 1$ à $2\mu - 1$, on peut écrire

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\mu\omega - \cos\nu\omega} = q^{\mu(\mu-1)}(1-q^{2\mu}) \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} (1+q^{2\nu})^2}{\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=2\mu-1} (1-q^{2\nu})}.$$

De même, le second produit peut s'écrire, en vertu de l'identité

$$\frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\nu\omega - \cos\mu\omega} = \frac{(1+q^{2\nu})^2}{(1-q^{2\nu-2\mu})(1-q^{2\nu+2\mu})},$$

$$\prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\nu\omega - \cos\mu\omega} = \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} (1+q^{2\nu})^2}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} (1-q^{2\nu-2\mu})(1-q^{2\nu+2\mu})};$$

et, si l'on remarque qu'au dénominateur la différence $(\nu - \mu)$ varie de 1 à $(m - \mu)$, et la somme $(\nu + \mu)$ de $(2\mu + 1)$ à $(m + \mu)$, on peut écrire

$$\prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} \frac{\cos\nu\omega + 1}{\cos\nu\omega - \cos\mu\omega} = \frac{1-q^{4\mu}}{(1+q^{2\mu})^2} \frac{\prod\limits_{\nu=\mu}^{\nu=m} (1+q^{2\nu})^2}{\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=m-\mu} (1-q^{2\nu}) \prod\limits_{\nu=2\mu}^{\nu=m+\mu} (1-q^{2\nu})};$$

remplaçant, dans l'expression (11), en remarquant que

$$\frac{1 - q^{4\mu}}{(1 + q^{2\mu})^2} = \frac{1 - q^{2\mu}}{1 + q^{2\mu}}$$

et que

$$\frac{1}{1 - \cos \mu\omega} = -\frac{2q^{2\mu}}{(1 - q^{2\mu})^2},$$

on a enfin

$$A_\mu = \frac{2q^\mu}{1 + q^{2\mu}} \frac{\prod_{\nu=1}^{\nu=m}(1 + q^{2\nu})}{\prod_{\nu=1}^{\nu=m-\mu}(1 - q^{2\nu}) \prod_{\nu=1}^{\nu=m+\mu}(1 - q^{2\nu})}.$$

Telle est la valeur que l'on tire pour A_μ des $(m - 1)$ équations (7); pour avoir le coefficient A_μ du développement cherché, il faut faire croître m indéfiniment. On a donc, en posant

$$Q = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(1 + q^{2\nu})^2}{(1 - q^{2\nu})^2},$$

$$A_\mu = \frac{2q^\mu}{1 + q^{2\mu}} Q;$$

d'ailleurs l'expression (10) de A_0 donne immédiatement $A_0 = Q$. On obtient ainsi le développement bien connu

$$\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} = Q\left(1 + 4\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu}{1 + q^{2\mu}} \cos\frac{\mu\pi z}{K}\right).$$

D'après les formules indiquées dans le *Traité des Fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet (p. 479), on a

$$\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} = \frac{\pi}{2gK}\sqrt{\frac{1}{k'}}\left(1 + 4\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu}{1 + q^{2\mu}} \cos\frac{\mu\pi z}{K}\right).$$

La comparaison entre ce développement et celui que nous venons d'établir donne

$$\frac{\pi}{2gK}\sqrt{\frac{1}{k'}} = Q,$$

ce qui est d'accord avec des formules bien connues, dues à Jacobi.